SCIENCES NAUTIQUES.

COURS COMPLET

A L'USAGE

DES OFFICIERS

DE LA MARINE MARCHANDE,

PAR LEVRET AINÉ,

PROFESSEUR D'HYDROGRAPHIE DE PREMIÈRE CLASSE AU HAVRE,
EX-PROFESSEUR AUX ÉCOLES D'ARTILLERIE ET A L'ÉCOLE NAVALE,
AUTEUR DE PLUSIEURS OUVRAGES SCIENTIFIQUES A L'USAGE
DES OFFICIERS DE LA MARINE NATIONALE.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

PARIS,
FIRMIN DIDOT FRERES, ÉDITEURS,
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT,
RUE JACOB, 56.

1849.

COURS COMPLET

DE

SCIENCES NAUTIQUES.

ARITHMÉTIQUE.

PARIS. — TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
RUE JACOB, 56.

Digitized by Google

11.5.269

SCIENCES NAUTIQUES.

COURS COMPLET

A L'USAGE

DES OFFICIERS

DE LA MARINE MARCHANDE,

PAR LEVRET AINÉ,

PROFESSEUR D'HYDROGRAPHIE DE PREMIÈRE CLASSE AU HAVRE,
EX-PROFESSEUR AUX ÉCOLES D'ARTILLERIE ET A L'ÉCOLE NAVALE,
AUTEUR DE PLUSIEURS OUVRAGES SCIENTIFIQUES A L'USAGE
DES OFFICIERS DE LA MARINE NATIONALE.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

PARIS,
FIRMIN DIDOT FRÈRES, ÉDITEURS,
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT,
RUE JACOB, 56.

1849.

Digitized by Google

PRÉFACE.

Pour la composition d'un ouvrage élémentaire, l'auteur doit être guidé par le passé et l'avenir des élèves auxquels il s'adresse; et c'est manquer le but, que d'espérer l'approprier à plusieurs spécialités.

Les marins qui aspirent aux grades de capitaine au long cours et de maître au cabotage, naviguent à l'âge où d'autres s'occupent à acquérir les connaissances élémentaires. Ils commencent, par suite, fort tard leur éducation mathématique.

Un cours à leur usage doit donc être spécial, renfermant tout ce qui est indispensable, omettant ce qui n'est que spéculatif.

S'astreindre à ne commencer une partie qu'après l'achèvement d'une autre, c'est retarder l'instruction en éloignant des préceptes leurs applications les plus utiles, c'est faire enfin un livre à l'usage des professeurs, qui n'en ont pas besoin.

Donner des idées d'ensemble, glisser sur les détails pour y revenir plus tard lorsque le jugement a pu se former, c'est suivre la seule marche réellement rapide et fructueuse. Telle est celle adoptée pour ce traité.

Dégagé de toute prétention, ne visant pas à la science, il est, par la simplicité des démonstrations et la modicité de

son prix, en harmonie avec l'institution éminemment démocratique des écoles d'hydrographie.

Divisé en volumes possibles à acquérir successivement, il répond à un besoin qu'une longue carrière d'enseignement a permis de reconnaître.

L'auteur recevra avec reconnaissance toutes les observations que ses collègues voudront bien lui adresser.

Digitized by Google

COURS COMPLET

DE SCIENCES.

ARITHMÉTIQUE.

La quantité est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution ; le nombre est la collection de plusieurs quantités de même espèce. Chacune de ces quantités se nomme unité. 8 mètres est un nombre. L'unité est dans ce cas le mètre. L'espèce des unités étant déterminée, le nombre se nomme concret. 8 est un nombre abstrait, et l'on va s'occuper spécialement d'abord de ces derniers.

NUMÉRATION.

La numération est l'art d'énoncer tous les nombres, et de les écrire avec un nombre limité de mots et de caractères.

L'homme a commencé par compter sur ses doigts, et à donner aux nombres ainsi formés les noms un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

Il regarda cette collection comme une espèce nouvelle d'unités nommées dizaines, et compta par dizaines comme par unités. Pour intercaler entre une et deux dizaines les nombres croissant successivement d'une seule unité simple, il ajouta au mot dix ceux

déjà inventés, et dit, Dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, dix-sept, dix-huit, dix-neuf. On a substitué aux six premiers les mots onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

Au lieu de deux dix, trois dix, quatre dix, cinq dix, six dix, sept dix, huit dix, neuf dix, on a dit vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix.

Lorsqu'à quatre-vingt-dix on ajoute successivement les neuf premiers nombres, on arrive à quatre-vingt-dix-neuf, et l'on se trouve encore obligé, pour former le nombre suivant, d'admettre une nouvelle espèce d'unités, nommée unités du troisième ordre, ou centaines. On compte par unités du troisième ordre depuis un jusqu'à neuf; et pour intercaler entre deux nombres de centaines consécutifs des nombres ne différant entre eux que d'une unité, on ajoute au nombre de centaines les quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres inventés.

Arrivé à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, pour former le nombre immédiatement supérieur, on invente une nouvelle espèce d'unités du quatrième ordre, nommée mille; et on compte par mille comme par unités, depuis un jusqu'à dix.

Afin de ne pas augmenter considérablement le nombre des mots, on convint de nommer les unités du cinquième ordre dizaines de mille, et celles du sixième, centaines de mille; celles du septième, millions; du huitième, dizaines de millions; du neuvième, centaines de millions; ce qui revient à dire que l'on peut regarder les unités mille, millions, comme des unités principales, et les dizaines, centaines, comme des unités intermédiaires. On voit que les mêmes énoncés reviennent par groupes de trois unités d'ordres successifs.

On est donc parvenu, par cette combinaison, à former les noms de tous les nombres à l'aide des noms des neuf premiers, et des mots unité, dizaine, centaine, mille, million, billion.

NUMÉRATION ÉCRITE.

Les neuf premiers nombres ont été représentés à dessein par les caractères essentiellement différents 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour écrire l'unité du second ordre, on l'a mise à la seconde place, en la faisant suivre d'un caractère particulier nommé zéro. On a donc écrit 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, et il a suffi de substituer à chacun de ces zéros successivement chacun des neuf premiers caractères inventés, pour écrire tous les nombres successifs de un à quatre-vingt-dix-neuf.

En suivant la même marche, et comme conséquence, on a représenté par 100, 1000, 10000, les unités des troisième, quatrième, cinquième ordre, ou centaines, mille, dizaines de mille; et on a substitué successivement aux zéros les nombres précédemment inventés, pour avoir une suite non interrompue.

Pour écrire d'après ces conventions un nombre énoncé, tel que cent vingt-sept mille huit cent quatre unités, on commence par chercher combien il doit avoir de chiffres. On trouve six, puisqu'il renferme des centaines de mille; on marque donc six points successifs, puis l'on remplace chacun d'eux par le chiffre qui correspond à l'unité dont il occupe le rang. On obtient ainsi 127804. Il est bon d'observer qu'on peut analyser ce nombre de plusieurs manières. Ainsi on peut dire qu'il renferme 12780 dizaines ou 1278 centaines, etc.

On voit qu'écrire un nombre revient à savoir écrire un nombre de trois chiffres, et à mettre les uns au bout des autres autant de nombres de trois chiffres qu'il y a de noms d'unités principales, telles que unité, mille, million, dans l'énoncé.

Réciproquement, pour énoncer un nombre écrit, on doit le partager en tranches de trois chiffres en allant de droite à gauche, et faire suivre l'énoncé de chaque tranche du nom de son unité principale. D'après cette règle, la dernière tranche à gauche peut être incomplète et ne renfermer qu'un ou deux chiffres. Ainsi le nombre 12,786,548 s'énonce douze millions, sept cent quatre-vingt-six mille, cinq cent quarante-huit unités.

Ce système de numération, nommé décimal, n'est pas certainement le système primitif. On retrouve chez tous les naturels de la côte d'Afrique le système de cinq en cinq, probablement parce que, pour compter sur ses doigts, il faut se servir d'une de ses mains pour nombrer sur les doigts de l'autre. On doit cependant regarder le système de dix en dix comme plus avantageux, puisque l'écriture d'un nombre et son énoncé sont des opérations plus simples

lorsque les unités renfermées dans celle du second ordre sont plus nombreuses.

On a longtemps compté par douzaines ; mais ce système, adopté seulement dans le langage, n'était pas suivi dans l'écriture. Ainsi on écrivait les nombres dans le système décimal, et on prononçait les mots du système duodécimal.

Il est facile de déduire de ces principes que tout chiffre écrit à la gauche d'un autre exprime des unités de l'ordre supérieur, ou dix fois plus grandes, et que chaque chiffre d'un nombre a deux valeurs distinctes : l'une, qu'on nomme absolue, qui ne dépend que du chiffre même, et l'autre, nommée relative, qui dépend de la place qu'il occupe dans ce nombre.

On peut faire aussi la remarque qu'une unité d'un ordre quelconque vaut plus d'unités simples que tout nombre, quels que soient ses chiffres significatifs, ne comprenant que des unités d'un ordre inférieur. Ainsi, une unité du quatrième ordre ou 1000 a une valeur plus grande que 999 ; donc, de deux nombres, celui qui a le plus de chiffres significatifs est le plus grand.

ADDITION.

Cette opération a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul. Le résultat s'appelle somme.

On conçoit qu'il suffirait de faire plusieurs additions partielles des unités des différents ordres, puis l'addition nouvelle de ces résultats, et de continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ne trouve plus qu'un seul chiffre significatif pour chaque espèce d'unités. Exemple :

On propose d'additionner les nombres

37985, 6549, 43216, 159844.

Les chiffres d'unités simples ajoutés ensemble produisent le nombre.		unités.	24
Les chiffres de dizaines ajoutés de même donnent	17 dizaines, ...	ou	170
Les chiffres de centaines.....	24 centaines, ...	ou	2400
Les chiffres de mille	25 mille,.....	ou	25000
Les chiffres de dizaines de mille.....	12 dizaines de mille,	ou	120000
Les chiffres de centaines de mille.....	1 centaine de mille,	ou	100000

Ajoutant de la même manière entre eux ces premiers résultats, on obtient

4 unités,
9 dizaines,
5 centaines,
7 mille,
4 dizaines de mille,
2 centaines de mille,

ou le nombre 247594 unités.

On parvient beaucoup plus promptement au résultat en disposant les nombres proposés dans un ordre particulier. On les écrit les uns au-dessous des autres, de telle manière que les unités des mêmes ordres se correspondent dans une même colonne verticale; puis, effectuant la somme des unités simples, on n'écrit que le chiffre des unités de ce premier résultat, retenant les dizaines pour les unir à celles qui sont dans la colonne des dizaines, sur laquelle on opère comme sur la première, et continuant ainsi jusqu'à épuiser toutes les colonnes. Le résultat se trouve ainsi chiffre à chiffre, et les opérations partielles sont toutes ramenées à des additions de nombres d'un seul chiffre, à des nombres d'un ou plusieurs chiffres.

La réunion de deux nombres par voie d'addition s'indique par le signe de convention + placé entre les deux. Il se prononce *plus*.

SOUSTRACTION.

Cette opération, dont le résultat se nomme différence, excès ou reste, a pour but de découvrir de combien un nombre en surpasse un autre. On peut dire aussi qu'elle a pour but, étant données une somme et l'une de ses parties, de retrouver l'autre partie.

Il est évident que si l'on retranche les uns des autres les chiffres correspondants des deux nombres placés l'un dessous l'autre, comme pour l'addition, chaque reste partiel sera un chiffre du reste total occupant le même rang.

Exemple : soit à retrancher 2513 de 8956. On disposera l'opération ainsi :

	8956
	2513
reste....	6443

6 unités, diminuées de 3 unités, donnent pour reste 3 unités.

5 dizaines, diminuées de 1 dizaine, donnent pour reste 4 dizaines. Ainsi de suite.

Mais si le chiffre du nombre supérieur était moindre que son correspondant du nombre inférieur, on éprouverait un obstacle. On lève cette difficulté en opérant une décomposition qui consiste à diminuer par la pensée le chiffre précédent du nombre supérieur d'une unité, et à augmenter celui sur lequel on opère de 10 unités. Cet emprunt, toujours suffisant, ne donnera jamais qu'un chiffre au reste; car le chiffre inférieur ne pouvant surpasser son supérieur que de 8 unités, le supérieur, augmenté de 10, rendra la soustraction possible; et si l'inférieur ne surpassait le supérieur que de 1 unité, ce dernier, augmenté de 10 unités, ne dépasserait son inférieur que de 9 unités. Exemple : de 3452 retrancher 2798.

Je regarderai le premier nombre comme composé de 344 dizaines, plus 12 unités, et dirai : 8 retranchés de 12 donnent 4 unités. Au lieu de 344 dizaines, je dirai 33 centaines, plus 14 dizaines; le chiffre des dizaines du reste sera donc 5. Au lieu de 33 centaines, je dirai 2 mille et 13 centaines; le chiffre des centaines du reste se trouvera donc en retranchant 7 de 13, il sera 6, et le reste total 654.

La méthode des emprunts, telle qu'on vient de l'exposer, serait encore en défaut, si le chiffre significatif sur lequel l'emprunt doit porter était remplacé par un zéro. On effectuerait l'emprunt sur le chiffre précédent de deux rangs. Mais cet emprunt donnant cent unités de l'ordre sur lequel on opère, et 10 de ces unités étant nécessaires et suffisantes, on en abandonnera 90 sur le zéro précédent, ou, en d'autres termes, ce zéro prendra la valeur 9.

Exemple : de 2604 retrancher 1357,

$$\begin{array}{r} 2604 \\ 1357 \\ \hline 1247 \end{array}$$

Empruntant une centaine alors que l'emprunt ne devait être que de 10 unités, on en laisse sur le zéro qui tient la place des dizaines, 90 ou 9 dizaines, et on obtient ainsi le reste 1247. Quel que soit donc le nombre de zéros par-dessus lesquels on passe pour arriver

au chiffre sur lequel on effectue l'emprunt, l'opération revient à considérer ce chiffre comme augmenté de dix unités, et chacun des zéros comme prenant la valeur 9.

La différence de deux nombres s'indique par le signe — placé entre deux, et qui se prononce *moins*.

Lorsque le nombre supérieur augmente, le reste augmente du même nombre; lorsque le nombre inférieur augmente, le reste diminue de cette augmentation : si l'on ajoutait le même nombre aux deux proposés, le reste ne changerait donc pas.

MULTIPLICATION.

Cette opération renferme essentiellement deux nombres donnés, le premier nommé multiplicande, le second multiplicateur, et tous deux indifféremment facteurs. Elle a pour but la découverte d'un troisième nombre, qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité.

Ainsi multiplier 5 par 7 revient à composer le résultat avec 5 comme 7 est composé avec l'unité ; mais 7 est formé de 7 fois l'unité; donc le résultat, nommé produit, se composera de 7 fois le multiplicande 5.

On voit donc que le mot multiplication n'entraîne pas essentiellement avec lui l'idée d'augmentation, puisque si le multiplicateur n'était composé que d'une partie d'unité, le produit ne serait formé que d'une partie du multiplicande.

On peut dire aussi, pour les nombres dont on s'occupe en ce moment, que leur multiplication a pour but de répéter le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le second.

Le produit de deux nombres s'indique en les séparant par le signe $\times$.

D'après la définition de la multiplication on voit que, dans le cas actuel, une addition, qui pourrait être laborieuse à la vérité, suffirait pour effectuer cette opération; car

7×5 voulant dire 7 répété 5 fois, ou $7+7+7+7+7$, il en résulte qu'il suffirait d'écrire le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et d'effectuer la somme. Mais

si le multiplicateur contenait un grand nombre d'unités, l'opération deviendrait inexécutable à cause de sa longueur.

D'après ces considérations la multiplication peut être considérée comme ayant pour but d'abréger une addition, dans laquelle tous les nombres à ajouter seraient égaux.

Pour effectuer la multiplication indépendamment de toute idée d'addition, on a cherché à la faire dépendre exclusivement des produits des nombres d'un seul chiffre par les nombres d'un seul chiffre. Ces produits, formés par additions, ont été renfermés dans un tableau qui a reçu le nom de table de Pythagore, du nom de son inventeur, et disposé comme il suit :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Il suffit de choisir le multipliende dans la colonne horizontale supérieure, le multiplicateur dans la colonne verticale à gauche, et de faire cadrer les deux colonnes correspondantes, pour trouver écrit à leur rencontre le produit des deux nombres.

Il est important de graver ces produits dans la mémoire, pour n'avoir pas à chaque instant recours à ce tableau, qui fait trouver le même résultat pour le produit de 7 par 5 que pour celui de 5 par 7, et ainsi des autres; ce qui donne à penser que le produit

de deux nombres ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des deux facteurs.

Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, 5728, par exemple, par 6, on conçoit qu'on doive répéter 6 fois chacune des parties de ce nombre, et additionner ces divers résultats, ce qui donnera

6 fois 8 unités, ou 48 unités.
6 fois 2 dizaines, ou 12 dizaines, ou 120 unites.
6 fois 7 centaines, ou 42 centaines, on 4200 unités.
6 fois 5 mille, ou 30 mille, ou 30000 unités.

L'addition de ces produits partiels donne le produit total 34368, qu'on pouvait obtenir directement en disant : 6 fois 8 font 48, on pose 8 et retient 4 ; 6 fois 2 donnent 12 et 4 de retenue 16, on pose 6 et retient 1 ; 6 fois 7 donnent 42 et 1 de retenue 43, on pose 3 et retient 4 ; ainsi de suite.

Passant actuellement au cas où le multiplicateur serait composé de plus d'un chiffre, on commence par la considération particulière du multiplicateur égal à 10, 100, 1000, etc. Alors l'opération se fait sans calcul, et se borne à l'addition d'un, deux ou trois zeros à la droite du multiplicande. En effet, en ajoutant un zéro à la droite du nombre 54, il devient 540. Puisque le 5, qui exprimait 5 dizaines, veut dire actuellement 5 centaines, quantité dix fois plus grande, le chiffre 4, qui exprimait des unités, exprime actuellement des dizaines, quantité dix fois plus grande ; chacune des parties du nombre est devenue dix fois plus grande ; le nombre lui-même est donc devenu dix fois plus grand. Le raisonnement serait analogue pour l'addition de deux ou trois zéros.

Si le multiplicateur était composé d'un chiffre significatif suivi d'un zéro, tel que 60 par exemple. Multiplier 728 par 60, c'est écrire 60 nombres égaux à 728, et faire l'addition : elle peut se partager en six additions partielles, composées chacune de 10 fois le nombre 728 : chacune de ces sommes sera donc égale à 7280, d'après ce qui vient d'être expliqué précédemment ; et, comme ces sommes partielles sont au nombre de six, le résultat total sera donc égal à 6 fois le nombre 7280 ; ce qui fait voir que, pour multiplier un nombre par 60, il faut d'abord le faire suivre d'un zéro, et multiplier ensuite ce résultat par 6, ou bien multiplier par 6 et faire suivre le produit d'un zéro.

Le même raisonnement fait voir qu'on multiplie un nombre par 400 en multipliant le nombre par 4, et ajoutant deux zéros à la droite du résultat.

Si actuellement on veut multiplier un nombre par 67, par exemple, il faudra le multiplier d'abord par 7, ensuite par 60, et ajouter ces deux produits partiels; il sera donc avantageux de les écrire d'avance dans un ordre tel, que cette somme puisse s'effectuer immédiatement; et, comme le second produit partiel sera terminé par un zéro, on adopte cette règle générale.

Pour effectuer la multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres, *on multiplie successivement tout le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, en commençant par la droite, et reculant chaque produit partiel d'un chiffre vers la gauche : la somme des produits partiels sera le produit total.*

Le nombre des produits partiels est évidemment égal au nombre des chiffres du multiplicateur.

Le produit de deux facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit leur ordre. En effet,

$5=1+1+1+1+1$; multipliant par 6 ces deux quantités égales, les produits seront egaux: $5\times6=6+6+6+6+6$; mais la seconde quantité exprime 6 répété 5 fois, ou 6×5: donc, $5\times6=6\times5$ (*).

Lorsqu'on augmente le multiplicateur d'une unité, le produit augmente d'une fois le multiplicande; lorsque c'est le multiplicande qu'on augmente d'une unité, d'après le principe précédent, le produit augmente d'une fois le multiplicateur; et lorsqu'on augmente a la fois les deux facteurs d'une unité, le produit augmente d'une fois le multiplicande, plus d'une fois le multiplicateur, plus d'une unité. En effet, soit primitivement à multiplier 57 par 23 : on a pour produit 1311. Si on multiplie actuellement $57+1$ par $23+1$, il faudra multiplier successivement chacune des parties du multiplicande par chacune des parties du multiplicateur, ce qui donnera $1\times1+57\times1+1\times23+57\times23$, ou $1+57+23+1311$, ce qui justifie le principe énoncé.

(*) Le signe = veut dire *égal*.

Si les deux facteurs étaient égaux, le produit se nommerait alors le carré de l'un d'eux. Ainsi, le produit de 25 par 25, qui est 625, se nomme le carré de 25. D'après la table de Pythagore, les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, sont les carrés des nombres consécutifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Si, pour multiplier une somme de nombres par un nombre, il faut multiplier par ce nombre chacune des parties de la somme, il n'en est pas de même lorsqu'on veut multiplier par un nombre un produit indiqué de facteurs : il ne faut pas multiplier par ce nombre chaque facteur, mais seulement un d'entre eux. En effet, soit le produit indiqué 3×4 à multiplier par 5, cela veut dire qu'on doit rendre le produit 3×4 5 fois plus grand, ce qui se fera en rendant, soit le multiplicande 3, soit le multiplicateur 4, 5 fois plus grand.

On nomme puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre. Ainsi,

l'expression 5×5 se nomme carré ou 2e puissance de 5,
$5 \times 5 \times 5$ cube ou 3e puissance,
$5 \times 5 \times 5 \times 5$ 4e puissance.

Toute puissance de 10 est toujours formée de l'unité suivie de zéros, et le nombre des zéros est égal au nombre des facteurs 10 ou au degré de la puissance.

Ainsi, le carré de 10 est 100,
le cube de 10 est 1000,
la 4e puisse de 10 est 10000.

En général, le carré d'un nombre composé de l'unité suivie de zéros est toujours l'unité suivie d'un nombre double de zéros.

Le cube serait l'unité suivie d'un nombre triple de zéros.

DIVISION.

La division est une opération qui défait ce que la multiplication a formé; elle a pour but, connaissant un produit nommé dividende, et l'un de ses facteurs nommé diviseur, de découvrir l'autre facteur nommé quotient.

Ainsi, diviser 24 par 6, c'est considérer 24 comme un produit,

6 comme un de ses facteurs, et se proposer de trouver le nombre par lequel on doit multiplier 6 pour reproduire 24. Ce nombre, facile à découvrir dans ce cas, étant 4, on a $24 = 6 \times 4$. La division s'indique en séparant le dividende et le diviseur par le signe : .

On peut donc dire que le quotient est un nombre tel, que son produit par le diviseur soit égal au dividende, ou indiquant de combien de fois le diviseur le dividende est composé; il exprime également combien de fois le dividende contient le diviseur.

On reconnaît de suite que le quotient pourrait, d'après cette dernière considération, s'obtenir en retranchant successivement le diviseur du dividende, puisqu'il se composerait d'autant d'unités qu'il serait possible de faire de ces soustractions. Mais cette méthode serait trop laborieuse, si le dividende était grand et le diviseur petit, pour être utilisée.

Elle permet seulement de constater que la division peut fournir un reste essentiellement plus petit que le diviseur ; et par suite on dit que le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste.

Lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre, et que le dividende est moindre que 10 fois le diviseur, la table de Pythagore suffit pour trouver le quotient. Ainsi, pour obtenir celui de 67 par 7, il faut descendre dans la colonne verticale qui porte en tête 7, et y chercher le nombre le plus approchant de 67 en moins. Le numéro d'ordre de la colonne horizontale sera le quotient. On trouve pour les nombres cités 9.

Puisque diviser 3728 par 52, c'est regarder 3728 comme le produit du nombre 52 par un facteur inconnu nommé quotient, cette recherche, véritable opération de décomposition, entraîne l'étude préalable des lois de la composition du produit.

Le résultat de la multiplication des deux nombres 183 et 375 est 68625. Il se compose des 3 produits partiels :

915 unités,
1281 dizaines,
549 centaines.

On voit par là que les 686 centaines du produit total sont composées : 1° du produit du diviseur 183 par les centaines du quo-

tient, et 2° des centaines fournies par les produits partiels précédents.

Or, ce dernier nombre de centaines refluantes ne peut atteindre 183, puisque la partie du quotient qui suit le chiffre des centaines est toujours moindre qu'une centaine.

Puisque les centaines du dividende se composent du produit du diviseur par le chiffre des centaines du quotient et d'un nombre de centaines moindre que le diviseur, le quotient de la division des centaines du dividende par le diviseur, ou le nombre qui exprime combien de fois elles contiennent le diviseur, ne peut être un chiffre plus grand que celui des centaines du quotient; il ne pouvait d'ailleurs être moindre.

On est donc ramené à effectuer la 1re division partielle de 686 par 183, qui s'effectue facilement de mémoire, et donne le quotient d'un seul chiffre, 3.

Le produit du diviseur par cette partie du quotient étant retranché du dividende primitif, donne un premier reste 13725, qu'on doit considérer comme le produit du même diviseur par la partie encore inconnue du quotient.

Opérant donc sur les nombres 13725 et 183 comme sur les précédents, on obtient le chiffre des dizaines du quotient, et ainsi de suite.

On dispose l'opération de la manière suivante :

	686,25	183
	549	375
1er reste.....	1372,5	
	1281	
2e reste.....	915	
	915	
Dernier reste...	0	

Soit à diviser 57864 par 184, on a toujours :

$184 \times 100 = 18400 <$ dividende (*).

$184 \times 1000 = 184000 >$ dividende (**)

(*) Le signe < veut dire *plus petit*.

(**) Le signe > veut dire *plus grand*.

Le quotient est donc compris entre 100 à 1000, c'est-à-dire composé de trois chiffres.

On voit que ce moyen de déterminer d'avance le nombre des chiffres du quotient revient à prendre à la gauche du dividende une partie capable de contenir le diviseur. En augmentant d'une unité le nombre des chiffres qui suivent cette partie séparée, on a le nombre des chiffres du quotient.

Exemples :

37,58	27	175,8	27	87,5964	34
	3 chiffres.		2 chiffres.		5 chiffres.

De tout ce qui précède, on déduit la règle générale suivante.

Règle générale. Pour diviser deux nombres l'un par l'autre, on commence par séparer sur la gauche du dividende une partie capable de contenir le diviseur.

Alors on divise la partie séparée par le diviseur ; on obtient le chiffre des plus hautes unités du quotient. Le produit du diviseur par ce chiffre étant retranché de la partie séparée du dividende fournit un premier reste, à la suite duquel on descend le chiffre suivant du dividende non encore utilisé. On opère sur ce nouveau dividende partiel comme on l'a fait sur la partie primitive, et on continue ces opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à descendre le dernier chiffre du dividende.

Si dans le courant de l'opération un des dividendes partiels était moindre que le diviseur, il faudrait mettre un zéro au quotient ; car il faut toujours que le nombre des chiffres qu'on a d'avance déterminé pour le résultat soit complet.

Si l'opération s'effectuait sans reste, un accroissement du dividende accroitrait le quotient ou produirait un reste. Une diminution du dividende ferait diminuer le quotient ; si le diviseur augmentait, le quotient diminuerait ; et si le diviseur diminuait, ou le quotient augmenterait, ou il se produirait un reste.

On voit que si le dividende était égal au diviseur, le quotient aurait pour valeur l'unité ; et que si l'on augmentait le dividende du diviseur, le quotient augmenterait d'une unité, puisque le dividende contiendrait une fois de plus le diviseur.

On voit aussi que si on multiplie le dividende et le diviseur par

un même nombre, le quotient n'est point modifié; le reste seul est multiplié par ce nombre.

Car le dividende primitif étant égal au produit de son diviseur par le quotient, plus le reste, si l'on multiplie le dividende par un certain nombre, et le diviseur aussi, pour que l'égalité subsiste encore, il faut que la seconde partie ou le reste soit multiplié par ce nombre.

Si une division effectuée fournit un reste, on n'a pas satisfait complétement à la définition, qui veut que le produit du diviseur par le quotient reproduise le dividende. On dit, dans ce cas, que le quotient obtenu l'est à moins d'une unité, ou est en erreur de moins d'une unité. On a dû chercher à le rendre complet dans tous les cas. Pour analyser cette nouvelle phase de la question, soit proposé de partager 27 en 4 parties égales; on divisera 27 par 4, et on obtiendra 6 pour quotient et 3 pour reste. 6 est donc trop petit, mais 7 est trop grand; et par suite il faut procéder à la formation d'un nombre compris entre 6 et 7, composé de 6 unités, plus d'une quantité moindre qu'une unité.

Or, puisqu'il reste 3 unités à diviser en 4 parties égales, on peut prendre une de ces 3 unités, la concevoir décomposée elle-même en 4 parties égales nommées quarts, faire la même opération sur chacune d'elles; et alors on aura à ajouter au quotient, pour le compléter, 1 quart + 1 quart + 1 quart ou 3 quarts, qu'on est convenu d'écrire ainsi : $\frac{3}{4}$.

Le quotient est donc actuellement complet, et égal à 6 $\frac{3}{4}$. Cette quantité trois quarts, née de la nécessité de l'opération, a reçu le nom de fraction, et veut dire 3 fois le quart de l'unité.

On peut lui attribuer une autre signification; car si on eût conçu ces 3 unités restant, unies entre elles, en divisant leur ensemble en 4 parties égales, le quotient eût encore été complété par cette nouvelle fraction, exprimant le quart de 3.

La fraction $\frac{3}{4}$ peut donc être regardée comme exprimant, soit 3 fois le quart d'une unité, soit le quart de 3 unités.

Ces considérations prendront un nouveau degré de simplicité si on les déduit d'une question du genre de celle-ci : partager 27 sacs de farine également entre 4 personnes. On donnera d'abord 6 sacs à chacune, et il restera 3 sacs à partager, ce qui se fera en donnant à chacune le quart de chaque sac; et comme les sacs étaient sup-

posés égaux, leurs quarts le sont aussi ; donc, recevoir le quart de chacun des trois sacs, c'est recevoir 3 fois le quart de l'un d'eux.

Si, au lieu de cela, on avait, des 3 sacs restants, composé 1 sac nouveau, chacun en eût reçu le quart ; donc il revient au même de recevoir le quart de 3 sacs, ou 3 fois le quart d'un sac.

Telle est l'origine des nombres nouveaux nommés fractions, et les divers points de vue sous lesquels on peut les envisager.

PREUVES.

On nomme preuves des opérations nouvelles, destinées à s'assurer de l'exactitude d'opérations primitives. Les preuves ne sont jamais des certitudes, mais des présomptions, d'autant plus fondées qu'elles s'appuient sur des opérations qui s'éloignent davantage de celles à contrôler.

On vérifie l'addition en la recommençant dans le sens inverse, c'est-à-dire, sommant les colonnes à partir du point inférieur.

On vérifie la soustraction en reformant le nombre supérieur au moyen de l'addition du reste avec le nombre inférieur.

On vérifie la multiplication en la recommençant, après avoir interverti l'ordre des facteurs.

On vérifie la division en reformant le dividende par l'addition du reste au produit du diviseur par le quotient.

FRACTIONS ORDINAIRES.

L'expression $\frac{3}{4}$ est une fraction. Composée de deux nombres superposés, le supérieur nommé numérateur, l'inférieur dénominateur, on peut la considérer comme voulant dire les trois quarts d'une unité, ou le quart de trois unités, ou le quotient indiqué de la division de 3 par 4. On la nomme aussi quelquefois rapport par quotient.

On peut donc dire qu'une fraction est la réunion de plusieurs parties égales d'un même tout ; que le dénominateur représenté par un nombre se prononce comme un mot, et indique en combien de parties égales l'unité a été divisée, le numérateur exprimant de combien de ces parties égales la fraction est composée.

Puisqu'elle peut être considérée comme un quotient dont le numérateur est le dividende et le dénominateur le diviseur, il s'ensuit qu'elle augmente avec le numérateur et diminue avec lui; qu'au contraire, l'augmentation du dénominateur entraine la diminution de la fraction, qui augmente lorsque le dénominateur diminue; qu'enfin elle est égale à l'unité lorsque le numérateur et le dénominateur sont égaux.

Le dénominateur n'étant qu'une désignation, il est manifeste qu'on double ou triple une fraction en doublant ou triplant son numérateur. On voit également qu'en regardant le dénominateur comme un diviseur, la fraction devient deux, trois fois plus petite, lorsque le dénominateur devient deux, trois fois plus grand.

Si donc on effectuait l'opération spéciale de la multiplication des deux termes par un même nombre, la fraction conserverait sa valeur primitive. Il ne faut pas conclure de là qu'une même opération, effectuée sur les deux termes d'une fraction, n'altère pas sa valeur, mais que les seules opérations de multiplication et de division des deux termes par un même nombre sont permises.

L'addition d'un même nombre aux deux termes change la valeur d'une fraction : principe qu'on peut reconnaitre avant toute démonstration, puisqu'en ajoutant 3 aux deux termes de la fraction, $\frac{2}{5}$ par exemple, on obtient $\frac{5}{8}$, plus grande qu'une demie, alors que $\frac{2}{5}$ était plus petite.

ADDITION DES FRACTIONS.

L'addition étant une opération destinée à réunir des unités de même grandeur, ne peut s'appliquer à des fractions dont les dénominateurs sont différents. Il s'agit donc de savoir si l'on peut, sans nuire aux valeurs de deux fractions, les ramener au même dénominateur. Soit pour exemple les deux fractions

$$\frac{2}{3} \text{ et } \frac{5}{7}.$$

En multipliant par 7 les deux termes de la 1re, et par 3 les deux termes de la 2e, on obtient

$$\frac{2\times7}{3\times7} \text{ et } \frac{5\times3}{7\times3}.$$

Les valeurs des deux fractions n'ont point été modifiées, d'après

ce qui a été dit précédemment, et les dénominateurs sont les mêmes, puisque la valeur du produit n'est point altérée par l'inversion des facteurs.

On dit en conséquence qu'on réduit deux fractions au même dénominateur en multipliant les deux termes de la 1re par le dénominateur de la 2e, et réciproquement.

Le même raisonnement s'applique à plusieurs fractions. Il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres. Cette opération, qui n'a d'ailleurs aucun rapport avec l'addition, est une préparation nécessaire.

Pour ajouter les fractions ramenées à cet état, on voit qu'il suffit de faire la somme des numérateurs, qui représentent les unités à sommer, et de donner au résultat pour dénominateur le dénominateur commun, indication du nom de ces parties; ainsi,

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+2+1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Ce résultat, écrit sous forme de fraction, ne peut pas cependant être considéré comme tel, puisque, d'après la définition de la fraction, le numérateur doit être essentiellement moindre que le dénominateur. Tout nombre tel que $\frac{2}{5}$ se nomme expression fractionnaire, et doit être regardé comme composé d'un nombre entier joint à une fraction.

Ainsi, le nombre $3 + \frac{5}{7}$ peut se transformer en réduisant le nombre entier 3 en 7es, ce qui donne $\frac{21}{7} + \frac{5}{7}$ ou $\frac{26}{7}$. On voit donc que, pour réduire un nombre fractionnaire en expression fractionnaire, on doit multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne, ajouter à ce produit le numérateur de la fraction, et donner à cette somme pour dénominateur celui de la fraction.

Réciproquement, pour transformer une expression fractionnaire en nombre fractionnaire, il faut effectuer la division du numérateur par le dénominateur, et le quotient complet sera l'expression demandée.

On peut réduire deux fractions au même numérateur aussi bien qu'au même dénominateur, en multipliant les deux termes de la première par le numérateur de la seconde, et réciproquement. On ne peut comparer deux fractions entre elles sous le rapport de leur grandeur, qu'étant préalablement ramenées à avoir, soit le

même numérateur, soit le même dénominateur. Dans le premier cas, la plus grande sera celle qui aura le plus petit dénominateur, et dans le second ce sera celle qui aura le plus grand numérateur. Ainsi, $\frac{4}{3}$ est plus grand que $\frac{4}{5}$, et $\frac{4}{7}$ est plus grand que $\frac{3}{7}$. On a inventé deux signes spéciaux pour indiquer qu'une quantité est plus petite ou plus grande qu'une autre.

Ainsi, $a > b$ veut dire a plus grand que b;
$a < b$ veut dire a plus petit que b.

On trouve la différence entre une fraction et l'unité en formant une nouvelle fraction ayant le même dénominateur que la proposée, et pour numérateur la différence entre ses deux termes. Ainsi, la fraction $\frac{7}{13}$ diffère de l'unité de $\frac{13-7}{13}$ ou de $\frac{6}{13}$.

Une fraction augmente de valeur lorsqu'on ajoute le même nombre à ses deux termes. En effet, soit proposée la fraction $\frac{5}{9}$; elle diffère de l'unité de $\frac{4}{9}$. Le même nombre 3, ajouté à ses deux termes, la transformerait en cette autre $\frac{8}{12}$, dont la différence avec l'unité est $\frac{4}{12}$. Cette fraction de différence a le même numérateur que la précédente, puisqu'une différence ne change pas par l'addition d'un même nombre aux deux termes; elle diffère moins de l'unité que la proposée, et est par suite plus grande qu'elle. Pour ajouter entre eux des nombres fractionnaires, tels que $3+\frac{2}{5}$, $4+\frac{3}{4}$, $5+\frac{3}{7}$, on les transforme en expressions fractionnaires équivalentes $\frac{17}{5}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{37}{7}$, qui, ajoutées, fournissent l'expression $\frac{1881}{140}$, se ramenant elle-même, au moyen de la division du numérateur par le dénominateur, en cette autre, $13+\frac{61}{140}$, but de l'opération primitive.

SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

Par la même raison que pour l'addition, on commence par réduire les fractions au même dénominateur; puis, retranchant le plus petit numérateur du plus grand, on donne à ce reste pour dénominateur celui commun aux deux fractions.

Ainsi, $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

Multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, c'est composer le résultat avec $\frac{3}{4}$, comme $\frac{5}{7}$ l'est avec l'unité. Or, $\frac{5}{7}$ étant formés de 5 fois le septième de l'unité, le produit devra être 5 fois le septième de $\frac{3}{4}$; pour l'obtenir, il faut donc prendre 1 septième de $\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4\times7}$, et le répéter 5 fois, ce qui donne enfin $\frac{3\times5}{4\times7}$.

Ce résultat a fait adopter cette règle générale : Pour multiplier entre elles deux fractions, il faut effectuer le produit des numérateurs, celui des dénominateurs, et diviser ces deux produits l'un par l'autre.

On voit que, pour cette opération, la réduction au même dénominateur n'a été d'aucune utilité, et que l'égalité, soit des numérateurs, soit des dénominateurs, n'apporte aucune modification ni simplification dans la formation de leur produit.

Le produit est moindre que le multiplicande, puisqu'il n'en est que les $\frac{5}{7}$; et multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$ revient à prendre les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$.

On a le droit, dans la multiplication des fractions, d'intervertir l'ordre des facteurs. En effet, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7}=\frac{5\times3}{7\times4}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$. On pouvait changer dans le produit l'ordre des facteurs entiers, qui formaient tant le numérateur que le dénominateur.

On est en droit de conclure de là que le produit de deux fractions est moindre que chacun des deux facteurs. Si l'un des facteurs était une expression fractionnaire, le produit serait plus grand que la fraction, plus petit que l'expression fractionnaire. La multiplication d'un nombre entier par une fraction, ou d'une fraction par un nombre entier, se ramène au cas précédent en donnant l'unité pour dénominateur au nombre entier. Ainsi,

$$3\times\frac{5}{7}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{1\times7}=\frac{3\times5}{7},$$
$$\frac{3}{7}\times5=\frac{3}{7}\times\frac{5}{1}=\frac{3\times5}{7\times1}=\frac{3\times5}{7}.$$

De là ces deux règles : On multiplie un nombre entier par une fraction en multipliant le nombre entier par le numérateur de la fraction, et divisant ce produit par le dénominateur; on multiplie une fraction par un nombre entier en multipliant le seul nu-

mérateur par le nombre entier, et divisant le produit par le dénominateur primitif.

Pour multiplier l'un par l'autre deux nombres fractionnaires, tels que

$$3+\frac{5}{6} \text{ et } 4+\frac{2}{7},$$

on les réduit en expressions fractionnaires équivalentes,

$$\frac{23}{6} \text{ et } \frac{30}{7};$$

leur produit sera $\frac{23\times30}{6\times7}$, ou $\frac{690}{42}$, ou enfin $16+\frac{18}{42}$.

Lorsqu'on multiplie une fraction par elle-même, on obtient son carré. Or le produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$ étant égal à $\frac{3\times3}{4\times4}$, ou $\frac{9}{16}$, on dit que le carré d'une fraction est composé du carré du numérateur, divisé par le carré du dénominateur. Lorsqu'on élève une fraction au carré, on obtient donc une fraction nouvelle moindre que la proposée.

DIVISION DES FRACTIONS.

D'après la définition de la division, effectuer cette opération sur les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$, c'est trouver une nouvelle expression qui, multipliée par $\frac{5}{7}$, reproduise $\frac{3}{4}$. Si donc on désigne par la lettre q le quotient cherché, on aura l'égalité

$$\frac{3}{4}=q\times\frac{5}{7}.$$

Or, multiplier q par $\frac{5}{7}$, c'est en prendre les $\frac{5}{7}$; on peut donc regarder cette égalité comme la traduction de cette question :

$\frac{3}{4}$ étant les $\frac{5}{7}$ d'un nombre inconnu, trouver ce nombre.

Or, lorsqu'on connaît les $\frac{5}{7}$ d'un nombre, on ne peut parvenir immédiatement à le découvrir. Il faut d'abord s'en procurer un seul septième, qui sera $\frac{3}{4\times5}$, et répéter ce septième sept fois, ce qui donne enfin $\frac{3\times7}{4\times5}$. Comparant ce résultat aux fractions proposées, on en déduit cette règle générale :

Pour effectuer la division de deux fractions, on doit multiplier la fraction dividende par celle diviseur renversée.

On a dit que le septième de la fraction $\frac{3}{4}$ est $\frac{3}{4\times7}$, parce qu'il est manifeste qu'on prend le septième d'une fraction en rendant son dénominateur sept fois plus grand.

D'après les raisonnements précédents, $\frac{3}{4}$ n'étant qu'une partie du quotient, on voit que le quotient de deux fractions proprement dites est plus grand que le dividende.

Si les fractions à diviser avaient le même dénominateur, telles que $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$, elles auraient pour quotient $\frac{3\times7}{7\times5}$ ou $\frac{3}{5}$, en supprimant aux deux termes le facteur 7, ce qui revient à les diviser tous deux par le même nombre 7.

On voit donc que, pour diviser deux fractions de même dénominateur, il faut seulement effectuer la division des numérateurs.

En raisonnant d'une manière analogue sur deux fractions de même numérateur, on voit que leur quotient se forme en divisant le dénominateur de la seconde par celui de la première. Si donc pour la division des fractions il n'est pas nécessaire de les réduire au même dénominateur, cependant l'opération se simplifie lorsqu'elles se présentent à cet état

Pour obtenir la règle par laquelle on divise un nombre entier par une fraction, on peut, soit faire un raisonnement analogue au précédent, soit mettre l'entier sous forme fractionnaire, et on rentre alors dans le cas précédent. Ainsi,

$$3 : \frac{4}{5} = \frac{3}{1} : \frac{4}{5} = \frac{3\times5}{1\times4} = \frac{3\times5}{4}.$$

On doit donc, pour diviser un nombre entier par une fraction, le multiplier par le dénominateur, et diviser le produit par le nnmérateur.

La division des nombres fractionnaires s'effectue sur ces nombres transformés en expressions fractionnaires.

S'il était demandé par quel nombre il convient de multiplier 5 pour obtenir 3, ce nombre serait le quotient de 3 par 5 ou $\frac{3}{5}$.

Par quel nombre faut-il multiplier 8 ponr produire 1? Réponse : $\frac{1}{8}$.

Par quel nombre faut-il multiplier 9 pour produire $\frac{1}{9}$? Réponse : $\frac{1}{\frac{9}{9}}$ ou $\frac{1}{9\times9}$ ou $\frac{1}{81}$.

OPÉRATIONS SUR LES PRODUITS INDIQUÉS.

Pour additionner plusieurs produits indiqués de nombres entiers, il faudrait les séparer les nns des autres par le signe *plus*.

Ce résultat est susceptible de simplification dans certains cas.

Si un même facteur entre dans ces différents produits, comme dans l'expression : $3 \times 5 + 3 \times 7 + 3 \times 9$, on voit qu'il exprime que 3 doit être pris 5 fois, puis 7 fois, puis 9 fois, c'est-à-dire, être multiplié par $5 + 7 + 9$, ce que l'on écrit ainsi par convention : $3 \times (5 + 7 + 9)$; c'est ce qu'on nomme mettre un nombre en facteur commun, et on énonce ainsi ce principe.

Pour ajouter des produits qui possèdent un facteur commun, on multiplie ce facteur par la somme de ceux non communs.

Si, pour diviser une somme indiquée par un nombre, il faut diviser par ce nombre chacune des parties qui constituent la somme, il n'en est pas de même lorsque c'est un produit indiqué qu'on doit diviser. L'opération ne doit porter dans ce cas que sur un des facteurs. Ainsi, pour diviser 75×8 par 5, il faut et il suffit de diviser 75 par 5, qui donne 15, et de multiplier le quotient obtenu par 8 pour avoir le quotient total; car en le multipliant par le diviseur 5, on retrouverait 75×8, ou le dividende primitif.

FRACTIONS DÉCIMALES.

On nomme fractions décimales celles qui ont pour dénominateur l'unité, suivie d'un ou plusieurs zéros. Ainsi, $\frac{7}{10}$, $\frac{18}{100}$, $\frac{37}{1000}$, sont des fractions décimales.

Les opérations qu'on peut avoir à exécuter sur des fractions de cette espèce sont toujours plus simples que celles analogues sur les fractions ordinaires, par suite de la facilité que l'on a de les réduire au même dénominateur, au moyen de l'addition du même nombre de zéros convenable à chacun des deux termes. On a cherché à les écrire sans faire usage du dénominateur.

On remarque à cet effet que puisque dans un nombre entier, tel que 375 par exemple, chaque chiffre exprime des unités dix fois moindres que celles représentées par le chiffre précédent à gauche, un chiffre écrit à la droite du 5 exprimerait des unités dix fois moins grandes que des unités simples, ou des dixièmes.

Il a seulement été nécessaire de fixer le chiffre des unités par un signe spécial, et on a choisi pour cet usage la virgule. Ainsi, 32,7 signifie trente-deux entiers, plus sept dixièmes : ce nombre est

donc de l'espèce de ceux nommés fractionnaires; et on voit que la manière de les écrire n'est que l'extension du système décimal de numeration. Pour traduire un nombre décimal en langage ordinaire, il faut énoncer d'abord la partie entière en terminant par le mot unité, puis celle décimale comme si elle représentait un nombre entier, en terminant par le nom des unités décimales que, d'après son rang, exprime le dernier chiffre à droite.

Réciproquement, pour écrire un nombre décimal énoncé, on commence par écrire la partie entière par les règles connues de la numération, puis la partie décimale, en faisant occuper à son dernier chiffre à droite le rang qu'exprime l'énoncé.

Il suffit pour cela de se rappeler que le chiffre qui suit immédiatement la virgule représente des dixièmes, le second des centièmes, le troisième des millièmes, ainsi de suite : 0,7. 0,34. 0,512. sont donc des fractions décimales que l'on peut traduire ainsi : $\frac{7}{10}$, $\frac{34}{100}$, $\frac{512}{1000}$, et qui se prononcent 7 dixièmes, 34 centièmes, 512 millièmes.

Un nombre décimal, tel que 52,375, peut se traduire de suite en expression fractionnaire ordinaire; car il signifie

$$52+\frac{375}{1000}, \text{ ou } \frac{52000}{1000}+\frac{375}{1000}, \text{ ou } \frac{52375}{1000}.$$

Pour traduire un nombre décimal en expression fractionnaire ordinaire, il faut donc supprimer la virgule et donner pour dénominateur l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il y avait de chiffres après la virgule avant la suppression.

On voit que les quatre opérations fondamentales sur les nombres décimaux doivent pouvoir se ramener aux opérations connues sur les nombres fractionnaires, mais avec des simplifications dépendantes de la composition des dénominateurs.

Il convient, pour établir ces nouvelles règles, d'analyser quelques principes fondamentaux sur les nombres décimaux écrits sans dénominateurs.

1er *principe*. On n'altère pas la valeur d'un nombre décimal en le faisant suivre d'un ou plusieurs zéros. Ainsi, 32,7 = 32,70 = 32,700.

En effet, chaque chiffre a conservé à la fois sa valeur absolue et sa valeur relative.

2e *principe*. On multiplie un nombre décimal par 10, 100,

1000, en reculant la virgule d'un, deux ou trois rangs vers la droite, parce qu'en effet chaque chiffre significatif prend une valeur relative 10, 100, 1000 fois plus grande.

3e *principe*. On divise un nombre décimal par 10, 100, 1000, en reculant sa virgule d'un, deux ou trois rangs vers la gauche. La démonstration de ce principe est entièrement analogue à celle du précédent.

ADDITION DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Les nombres décimaux étant compris parmi ceux qu'exprime notre système de numération, et leurs diverses unités ayant entre elles les mêmes relations que dans les nombres entiers, leur addition doit s'effectuer de la même manière, en disposant les unités des mêmes ordres de grandeur dans une même colonne verticale, et plaçant la virgule au résultat dans la colonne des virgules des nombres proposés.

SOUSTRACTION DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Cette opération doit s'exécuter par les mêmes règles que sur les nombres entiers.

Il est seulement commode d'ajouter des zéros à la droite de celui des deux nombres ayant le moins de chiffres décimaux, pour qu'ils en possèdent autant l'un que l'autre.

Ainsi, 17,54 — 3,728 = 17,540 — 3,728.

Opérant alors comme pour les nombres entiers, on trouve :

$$\begin{array}{r} 17{,}540 \\ 3{,}728 \\ \hline 13{,}812 \end{array}$$

Si un nombre décimal devait être retranché du nombre 10, on pourrait se dispenser de le compléter, et c'est ce que l'on fait généralement, car : 10 — 3,78542 = 10,00000 — 3,78542.

$$\begin{array}{r} 10{,}00000 \\ 3{,}78542 \\ \hline 6{,}21458 \end{array}$$

On voit que ce résultat pouvait s'obtenir immédiatement chiffre à chiffre, en complétant le dernier chiffre à 10, et les autres à 9. Aussi l'appelle-t-on le complément à 10 du nombre proposé.

MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Pour découvrir la règle à suivre, on peut ramener cette opération à un cas connu, en mettant chacun des deux nombres sous forme d'expression fractionnaire; ainsi :

$$5,34 \times 2,5 = \frac{534}{100} \times \frac{25}{10} = \frac{534 \times 25}{1000}.$$

Ce résultat met en évidence cette règle à suivre : Multiplier les deux nombres, abstraction faite de la virgule, et diviser leur produit par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y en avait aux deux dénominateurs, ou, ce qui revient au même, séparer sur sa droite autant de chiffres par une virgule qu'il y avait de chiffres décimaux dans les deux facteurs.

On arrive à la même règle en analysant la modification de valeur que subit le produit par la suppression de la virgule dans chacun des deux facteurs.

DIVISION DES NOMBRES DECIMAUX.

Soit à diviser l'un par l'autre les deux nombres décimaux 25,72 et 4,5.

Mettant ces nombres sous forme d'expressions fractionnaires, on obtient :

$$\frac{2572}{100} : \frac{45}{10}.$$

Et comme on sait que la division de deux nombres fractionnaires se simplifie lorsqu'ils ont le même dénominateur, on les ramène immédiatement à cet état sans calcul, ce qui donne $\frac{2572}{100} : \frac{450}{100} = \frac{2572}{450}$.

La comparaison de ce résultat aux nombres qui l'ont fourni permet d'établir cette règle générale :

Pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre, on doit rendre le nombre de leurs chiffres décimaux le même par l'addition à la droite de l'un d'eux d'un nombre convenable de zéros,

puis faire la division sans tenir compte de la virgule ; le quotient ainsi obtenu est celui cherché.

Il est bien évident que si le nombre des chiffres décimaux était le même dès le principe, l'addition de zéros à l'un des deux nombres serait une opération sans but. Exemples :

$$575,2 : 34,57 = 57520 : 3457 = 16.$$

Ce quotient est obtenu à moins d'une unité.

$$349,54 : 26,39 = 34954 : 2639 = 13.$$

Dans la division de deux nombres entiers, on peut compléter le quotient par une fraction décimale. Ainsi, la division des deux nombres 572 et 18 conduit au quotient 31 et au reste 14. Ce reste, 14 unités, n'étant plus divisible par 31, on le réduit en dixièmes par l'addition d'un zéro. Cette opération est celle qu'on exécute chaque jour, lorsque, pour distribuer de l'argent à plusieurs personnes avec une pièce, on la convertit en monnaie. La division redevient possible, et le chiffre 7 trouvé au quotient exprime des dixièmes. Le quotient 31,7 est donc obtenu à moins d'un dixième. En réduisant le nouveau reste 14 dixièmes en centièmes par l'addition d'un zéro, on trouve le nouveau chiffre 7 au quotient, qui est alors 31,77, obtenu à moins d'un centième. Voici le détail de l'opération :

572	18
32	31,77
140	
140	

Le nombre 31 entiers $\frac{14}{18}$ eût été le quotient exact, alors qu'en cherchant à l'obtenir sous forme de nombre décimal, on s'aperçoit, dans l'exemple précédent, qu'on n'arrivera jamais à la fin de l'opération, le retour des mêmes restes entraînant celui des mêmes chiffres au quotient, qui prend alors la forme dite périodique. Si donc on n'obtient pas dans ce cas le quotient complet, au moins approche-t-on de sa valeur autant que bon semble. Il ne faut pas inférer de là qu'en opérant en décimales, le quotient ne se termine jamais. Ainsi, la division de 573 par 25 conduit au quotient exact 22,92. La périodicité du quotient décimal ou sa terminaison tiennent aux propriétés particulières des nombres ; on les analysera plus tard.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que, pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, on peut se dispenser d'ajouter des zéros au diviseur pour lui donner autant de chiffres décimaux qu'au dividende; car cela forcerait alors, pour avoir au quotient la même approximation, à faire suivre les restes successifs de zéros en nombre égal à ceux ajoutés au diviseur. Exemples :

```
57,826 | 15
12 8   |------
 . 82  | 3,855
   76
    1
```

Le quotient obtenu à moins d'un millième est 3,855.

Si on eût suivi la règle générale donnée en tête de ce chapitre, l'opération se fût présentée ainsi :

```
57826    | 15000
128260   |-------
 .82600  | 3,855
  .76000
    1000
```

On voit que le quotient est le même que dans le cas précédent, et que sa recherche s'est compliquée, puisque l'addition de trois zéros au diviseur a nécessité l'addition du même nombre de zéros au dividende, pour arriver à la même approximation pour le quotient.

Si, d'après les considérations précédentes, on imposait d'avance au quotient de deux nombres décimaux l'obligation d'être obtenu à une approximation déterminée, on devrait commencer par compléter le nombre des décimales, puis effacer la virgule, et faire alors suivre le dividende d'autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux au quotient. Ainsi, pour obtenir le quotient de 57,2 par 8,57, à moins d'un millième, on passerait par l'intermédiaire des considérations suivantes :

57,2 : 8,57 = 57,20 : 8,57 = 5720 : 857. Ce quotient serait à moins d'une unité; puis 5720 : 857 = 5720,000 : 857. Ce quotient serait à moins d'un millième.

On voit, d'après ce qui précède, que, pour convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, il faut regarder la première

comme expression d'une division à effectuer, et procéder à l'opération d'après les principes de la division décimale. Ainsi, pour convertir $\frac{17}{20}$ en décimales, on dispose le calcul ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 170 & 20 \\ \cline{2-2} 100 & 0,85 \\ 0 & \end{array}$$

On a donc $\frac{17}{20} = 0,85$.

La réduction ne peut pas toujours s'effectuer exactement, ainsi qu'on l'a établi précédemment, comme dans cet exemple : $\frac{7}{9}$. On trouve

$$\begin{array}{r|l} 70 & 9 \\ \cline{2-2} 70 & 0,777 \\ 7 & \end{array}$$

ou un quotient indéfini 0,777.

Soit encore cet autre exemple : $\frac{3}{11}$. On trouve

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \cline{2-2} 80 & 0,2727 \\ 30 & \\ 80 & \\ 3 & \end{array}$$

Le quotient, encore indéfini, est 0,272727.

Enfin, la réduction en décimales de la fraction ordinaire $\frac{7}{12}$ conduit à 0,58333. Cette forme se distingue de la précédente en ce que le nombre 58 ne se reproduit pas, et constitue la partie mixte de ce quotient, nommé périodique mixte, pour le distinguer du précédent, qui se nomme périodique simple.

La partie mixte peut d'ailleurs être composée du même nombre de chiffres qu'une des périodes, ou en renfermer un nombre soit plus grand, soit plus petit.

Ainsi, les expressions 0,275555...., 0,27545454...., 0,74848, sont des fractions périodiques mixtes. Le dernier chiffre de la partie mixte ne peut être le même que le dernier d'une période ; car 27 pour partie mixte et 547 pour période donneraient 0,27547547, qui voudrait dire 2 pour partie mixte, et 754 pour période.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

Mesurer une quantité, c'est chercher combien de fois et parties de fois elle en contient une autre de même nature prise pour unité; ou, plus généralement, c'est trouver le rapport entre cette quantité et son unité.

L'unité doit remplir les conditions suivantes : être de même nature que l'objet à mesurer; être déterminée dans sa forme; être variable dans sa grandeur. Cette dernière condition a pour but de ne pas obtenir pour mesures des nombres immenses ou très-petits. Ainsi, pour mesurer une longueur, on prend pour unité une longueur ; on ne la choisit pas très-petite si la ligne à mesurer est grande, ni très-grande si celle à mesurer est petite.

On ne s'occupera ici que de la mesure des objets les plus usuels, savoir, les longueurs, les surfaces, les volumes, les capacités, les poids, les valeurs monétaires, le temps.

On a commencé par établir une unité de longueur qui, prise sur les dimensions de notre globe, fût indépendante du caprice de l'homme, et d'autant de durée que lui. De cette unité une fois déterminée on a déduit toutes les autres, fixes comme celle dont elles dérivent; puis on a subdivisé chacune d'elles en unités de dix en dix fois plus petites ou amplifiées de dix en dix, et on a inventé des mots constants pour indiquer ces subdivisions et amplifications. C'est en cela que consiste le système.

Les unités des diverses espèces ont reçu les noms suivants:

L'unité de longueur : mètre, dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur.

Unité de superficie : are, carré ayant dix mètres de côté.

Unité de volume : stère, cube ayant un mètre d'arête.

Unité de capacité : litre; c'est une subdivision de la précédente; c'est la capacité d'un cube ayant un dixième de mètre pour arête.

Unité de poids : gramme ; c'est le poids de l'eau douce contenue dans un cube ayant un centième de mètre d'arête.

Unité monétaire : franc, pièce d'argent du poids de 5 grammes, et composée de 4 grammes $\frac{1}{2}$ d'argent fin et $\frac{1}{2}$ gramme d'alliage.

Les dixièmes, centièmes, millièmes parties d'une unité principale se désignent par les mots déci, centi, milli;

Et les multiples dix, cent, mille, dix mille, par les mots déca, hecto, kilo, myria.

Ainsi, on dit : décimètre, déciare, décistère, décilitre, décigramme, décifranc ou décime; ce qui veut dire : dixième du mètre, dixième de l'are, dixième du stère, etc.;

Centimètre, centiare, centilitre, centigramme, centifranc ou centime, pour exprimer la centième partie du mètre, de l'are, du stère, du litre, etc.

Les expressions décamètre, décare, décastère, décalitre, décagramme, décafranc, veulent dire : dix mètres, ares, stères, litres, grammes ou francs. La dernière est inusitée.

Hectomètre, hectare, hectostère, hectolitre, hectogramme, hectofranc, veulent dire : cent mètres, ares, stères, etc.

Ainsi de suite.

Les kilomètres et myriamètres sont principalement destinés à servir d'unité de distance d'un lieu à un autre sur la surface du globe.

L'are est employé pour unité dans les mesures agraires; pour des surfaces moindres, on prend le mètre carré.

Le stère est l'unité de volume employée pour les corps d'un prix peu élevé, tels que le bois de chauffage, le charbon, le sable, les cailloux. Pour les objets d'un plus grand prix on emploie le décimètre cube. Le décalitre et l'hectolitre sont principalement employés pour les liquides;

Le kilogramme, pour les poids des corps d'une valeur peu élevée.

Les unités du nouveau système étant soumises à la loi décimale, les opérations sur ces nombres s'effectuent comme sur les nombres décimaux. Seulement leurs amplifications et subdivisions présentent certaines particularités qui ne peuvent trouver place ici, quelques notions de géométrie étant nécessaires pour les établir.

REGLES DE TROIS,

DE SOCIÉTÉ, D'INTÉRÊTS, D'ESCOMPTE, D'ALLIAGE, DE PARTAGE, ETC.

RÈGLE DE TROIS.

En utilisant seulement les quatre opérations fondamentales qu'on vient d'analyser sur les diverses espèces de nombres, on peut résoudre une foule de questions usuelles. C'est ce qu'on entreprend en ce moment.

3 ouvriers ont fait 7 mètres d'ouvrage dans un certain temps.

Combien 5 ouvriers en feront-ils dans le même temps?

Puisque 3 ouvriers ont fait 7 mètres, 1 ouvrier en a fait le tiers ou $\frac{7^m}{3}$.

5 ouvriers ont donc fait 5 fois $\frac{7^m}{3}$ ou $\frac{7^m \times 5}{3}$ ou $\frac{35^m}{3}$, ou enfin $11^m \frac{2}{3}$.

Les questions de cette espèce se nomment règles de trois, parce que leur énoncé comporte trois nombres donnés.

Autre exemple : 3 ouvriers, en 7 jours, ont fait 10 mètres d'ouvrage.

Combien 5 ouvriers en 8 jours feront-ils de mètres du même ouvrage?

Puisque 3 ouvriers ont fait 10 mètres en 7 jours,
1 ouvrier a fait $\frac{10}{3}$ mètres en 7 jours.
1 ouvrier a fait le 7e de $\frac{10^m}{3}$ en 1 jour ou $\frac{10^m}{3 \times 7}$.
5 ouvriers en 1 jour auront donc fait 5 fois $\frac{10^m}{3 \times 7}$ ou $\frac{10^m \times 5}{3 \times 7}$.
5 ouvriers en 8 jours auront donc fait 8 fois $\frac{10 \times 5}{3 \times 7}$ ou $\frac{10^m \times 5 \times 8}{3 \times 7}$ ou $19^m + \frac{1}{21}$.

Cette question, de même nature que la précédente, renfermant cinq nombres donnés, prend le nom de règle de trois composée. Elle est dite directe, parce que plus il y a d'ouvriers et de jours de travail, plus il y a d'ouvrage fait.

5 ouvriers pour faire 7 mètres ont employé 8 jours.

Combien 7 ouvriers pour faire 10 mètres emploieront-ils de jours?

Puisque aux 5 ouvriers il a fallu 8 jours, à un seul ouvrier il aurait fallu $8^j \times 5$ pour faire 7 mètres; pour faire 1 mètre il eût employé $\frac{8^j \times 5}{7}$. Les 5 ouvriers proposés emploieraient $\frac{8^j \times 5}{7 \times 5}$ pour faire un mètre, et pour en faire 10 $\frac{8^j \times 5 \times 10}{7 \times 5}$, ou $\frac{80}{7}$, ou $11^j \frac{3}{7}$.

Cette règle de trois se nomme inverse, parce que le nombre cherché de jours est d'autant moins grand que le nombre d'ouvriers est plus considérable.

Mais que la règle proposée soit directe ou inverse, la marche à suivre n'en est pas modifiée. Il faut toujours ramener à l'unité successivement chacun des nombres formant la première partie de la question, le nombre de l'espèce de celui cherché excepté; puis substituer à chacune de ces unités successivement chacun des nombres donnés dans la seconde partie de la question.

Exemple : 5 ouvriers travaillant 6 heures par jour, ayant leur force représentée par 7 et la dureté du terrain par 9, pour faire 50 mètres ont mis 12 jours; combien 8 ouvriers, travaillant 5 heures par jour, la force étant représentée par 8 et la dureté du terrain par 6, pour faire 60 mètres mettront-ils?

$1^o \ldots\ldots 6^h \ldots\ldots 7^f \ldots\ldots 9^d \ldots\ldots 50^m \ldots\ldots 12^j \times 5.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 7^f \ldots\ldots 9^d \ldots\ldots 50^m \ldots\ldots 12^j \times 5 \times 6.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 1^f \ldots\ldots 9^d \ldots\ldots 50^m \ldots\ldots 12^j \times 5 \times 6 \times 7.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 1^f \ldots\ldots 1^d \ldots\ldots 50^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7}{9}.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 1^f \ldots\ldots 1^d \ldots\ldots 1^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7}{9 \times 50}.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 1^f \ldots\ldots 1^d \ldots\ldots 60^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7 \times 60}{9 \times 50}.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 1^f \ldots\ldots 6^d \ldots\ldots 60^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7 \times 60 \times 6}{9 \times 50}.$

$1^o \ldots\ldots 1^h \ldots\ldots 8^f \ldots\ldots 6^d \ldots\ldots 60^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7 \times 60 \times 6}{9 \times 50 \times 8}.$

$1^o \ldots\ldots 5^h \ldots\ldots 8^f \ldots\ldots 6^d \ldots\ldots 60^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7 \times 60 \times 6}{9 \times 50 \times 8 \times 5}.$

$8^o \ldots\ldots 5^h \ldots\ldots 8^f \ldots\ldots 6^d \ldots\ldots 60^m \ldots\ldots \frac{12^j \times 5 \times 6 \times 7 \times 60 \times 6}{9 \times 50 \times 8 \times 5 \times 8}.$

On obtient donc, en effectuant les opérations indiquées, $6^j + \frac{3}{10}$.

On fait la remarque qu'il y a en général un facteur de plus au numérateur qu'au dénominateur du résultat.

REGLE DE SOCIÉTÉ.

3 associés ont réuni les sommes suivantes :

Le premier, 5000f ;
Le deuxième, 6000 ;
Le troisième, 9000.

Ils ont fait un bénéfice de 10000f ; il faut le répartir eu égard à la mise de chacun.

La somme qui a gagné 10000f est celle des mises, ou 20000f. Puisque 20000f ont gagné 10000f,

1f a gagné $\frac{10000^f}{20000}$ ou $\frac{1}{2}^f$;
donc 5000f ont gagné $\frac{1}{2}^f \times 5000$ ou 2500f,
6000f id. $\frac{1}{2}^f \times 6000$ ou 3000f,
9000f id. $\frac{1}{2}^f \times 9000$ ou 4500f ;

bénéfices dont la réunion forme bien celui total donné.

Trois associés ont apporté, le 1er, 5000f pendant 7 mois ;
le 2e, 4000f pendant 9 mois ;
le 3e, 3000f pendant 11 mois.

La spéculation a rapporté le bénéfice de 8000f, qu'il faut répartir entre eux, eu égard à la mise et au temps. Or,

5000f pend. 7 m. reviennent à 5000f × 7 pend. 1 m. ou 35000f pend. 1 mois.
4000f id. 9 m. id. à 4000f × 9 id. ou 36000f id. 1 mois.
3000f id. 11 m. id. à 3000f × 11 id. ou 33000f id. 1 mois

Les temps étant actuellement rendus égaux par cette préparation, on est rentré dans la première opération.

RÈGLE DE PARTAGE.

Partager le nombre 18 en trois parties telles que la première soit le triple de la seconde, et la seconde le quadruple de la troisième.

Si la 3e partie était représentée par 1,
la 2e, qui doit être quadruple, serait 4 ;
la 1re, qui doit être triple de la 2e, serait 12.

Il faudrait donc que le nombre à partager fût 12 + 4 + 1 ou 17, pour que la 3e partie fût égale à 1.

Si le nombre à partager était 1, la 3e partie serait donc $\frac{1}{17}$.
Mais le nombre proposé est 18;

La 3e partie est donc $\frac{1}{17} \times 18$ ou $\frac{18}{17}$.
La 2e..... $\frac{18}{17} \times 4$ ou $\frac{18 \times 4}{17}$.
La 1re..... $\frac{18 \times 4}{17} \times 3$ ou $\frac{18 \times 4 \times 3}{17}$.

Partager le nombre 56 en trois parties telles que la première soit les $\frac{2}{3}$ de la seconde, et la seconde les $\frac{5}{6}$ de la troisième.

Si la troisième était 1, la seconde serait les $\frac{5}{6}$ de 1, ou $\frac{5}{6}$; la première serait les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ ou $\frac{2 \times 5}{3 \times 6}$. Ces 3 parties effectuées se réduisent à :

La 1re..... $\frac{10}{18} = \frac{60}{108}$.
La 2e..... $\frac{5}{6} = \frac{90}{108}$.
La 3e..... $1 = \frac{108}{108}$.

Leur somme donne $\frac{258}{108}$.

Si donc le nombre à partager était $\frac{258}{108}$, la 3e partie serait 1.
S'il était 258 entiers ou 108 fois plus grand, la 3e partie serait 108.
S'il était 1..... la 3e serait $\frac{108}{258}$.
Mais il est 56..... la 3e sera donc $\frac{108 \times 56}{258}$.

On trouverait la 2e en multipliant celle-ci par $\frac{5}{6}$, et la 1re en multipliant la 2e par $\frac{2}{3}$.

Un équipage est composé de 1 capitaine, 2 lieutenants, 1 chirurgien, 4 maîtres, 100 hommes, 6 mousses. Le capitaine a droit à 30 parts, chaque lieutenant à 20, le chirurgien à 15, chaque maître à 5, chaque homme à 1, chaque mousse à $\frac{1}{2}$. La prise est de 100000f, combien revient-il à chacun?

D'après l'énoncé, on doit trouver dans la prise $30^p + 40^p + 15^p + 20^p + 100^p + 3^p$, ou 208 parts égales; il suffira donc de diviser 100000f par 208 pour avoir la valeur d'une part, qui, une fois connue, permettra d'établir facilement ce qui revient à chacun.

RÈGLE D'INTÉRÊT.

Le taux de l'intérêt est la somme qu'on ajoute à 100 francs prêtés pendant un an, pour indemniser de la privation de cette somme pendant ce temps.

Combien 3728 francs rapporteront-ils d'intérêt à 5 p. % au bout de l'an? Puisque 100^f rapportent 5^f.

1^f rapporte $\frac{5^f}{100}$ ou $0^f,05$;

donc 3728^f rapportent $0^f,05 \times 3728$.

Combien 5718 fr. rapporteront-ils à 6 p. % au bout de 10 mois?

100^f en 1 an rapportent.... 6^f.

100^f en 1 mois rapportent.... $\frac{6^f}{12}$.

1^f en 1 mois rapporte.... $\frac{6^f}{12 \times 100}$.

1^f en 10 mois rapporte.... $\frac{6^f \times 10}{12 \times 100}$.

5718^f en 10 mois rapp^{nt} donc $\frac{6^f \times 10 \times 5718}{12 \times 100}$.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

Quelle valeur aurait aujourd'hui une somme de 4819 francs, payable seulement dans un an, l'intérêt étant à 5 p. %?

Puisque 100^f rapportent 5^f par an, ils valent donc au bout de l'année 105^f.

105 francs, payables dans un an, valent donc aujourd'hui 100^f.

1 franc, id. id. vaut aujourd'hui $\frac{100^f}{105}$.

Donc 4819^f, id. id. valent aujourd'hui $\frac{100^f}{105} \times 4819^f$.

On retient dans la marine 3 p. % sur les sommes à payer. Combien faut-il demander pour toucher 3549^f?

Pour 100^f demandés, on touche 97^f.

Donc, pour toucher 97^f, il faut en demander 100^f.

Pour toucher 1^f, id. $\frac{100^f}{97}$.

Pour toucher 3549^f id. $\frac{100^f}{97} \times 3549^f$.

RÈGLE D'ALLIAGE.

Avec du thé à 16^f le kil.

et du thé à 21^f le kil.

composer 50 kilogrammes de thé à 18^f.

Le mélange à composer vaut argent $18^f \times 50$ ou 900^f.

Les 50 kilogrammes de thé à 16^f ne valent argent que 800^f.

Il faut augmenter la dépense de 100^f par la substitution d'un certain nombre de kilogrammes à 21^f, à pareil nombre de kilo-

grammes à 16^f. Or, par chaque kilogramme remplacé, la dépense augmente de 5^f; elle augmente donc de 1^f pour un $\frac{1}{5}^k$ remplacé.

Et, par suite, de 100^f pour $\frac{1}{5}^k \times 100$ ou $\frac{100}{5}^k$ ou 20^k remplacés.

Il faut donc 20 kilogrammes à 21^f,

et 30 kilogrammes à 16^f.

Et, en effet, ce mélange de 50 kil. a pour valeur $420^f + 480^f$ ou 900^f; donc chaque kilogramme a pour valeur $\frac{900}{50}$ ou 18.

QUESTIONS DIVERSES.

Combien faut-il de mètres de toile, à 82 centim. de large, pour couvrir 60 mètres de drap ayant 75 centim. de large?

Si la toile et le drap avaient tous deux un centimètre de large, il faudrait 60 mètres de toile.

Mais la toile a 75 centimètres de large; il en faudra donc $\frac{60^m}{75}$.

Mais le drap a 82 centimètres de large; donc il faudra $\frac{60^m \times 82}{75}$ de toile pour le doubler.

Deux courriers qui marchent dans le même sens partent en même temps de deux points distants entre eux de 50 lieues; celui qui est en avant fait 8 lieues en 3 heures; celui qui le poursuit parcourt 7 lieues en 2 heures. Au bout de combien de temps se rencontreront-ils, et combien chacun aura-t-il fait de chemin?

Le 1er en 1^h fait..... $\frac{7}{2}^l$.

Le 2e en 1^h parcourt $\frac{8}{3}^l$.

Donc, lorsqu'ils auront marché simultanément pendant une heure, ils se seront rapprochés l'un de l'autre de $\frac{7}{2}^l - \frac{8}{3}^l$, ou $\frac{21}{6}^l - \frac{16}{6}$, ou $\frac{5}{6}^l$.

Pour se rapprocher de $\frac{5}{6}^l$, ils mettent 1 heure.

Pour se rapprocher de 5 lieues, ils mettront 6 heures.

id. de 1 lieue, ils mettront $\frac{6}{5}$ heures.

Donc de 50 lieues qui les séparaient $\frac{6^h \times 50}{5}$, ou 60^h,

le premier aura parcouru $\frac{7}{2}^l \times 60$, ou 210^l,

le second id. $\frac{8}{3}^l \times 60$, ou 160^l;

distances dont la différence est bien 50 lieues.

Si les courriers avaient marché à la rencontre l'un de l'autre, ils se seraient rapprochés par heure de $\frac{7}{2} + \frac{8}{3}$, ou $\frac{37}{6}$. Le problème s'achèverait comme précédemment.

Trois fontaines coulent dans un bassin :

La 1re le remplirait à elle seule en 8 minutes.
La 2e..... en 6 id.
La 3e..... en 5 id.

Les trois fontaines sont supposées avoir leur effet simultané ; on demande au bout de combien de temps le bassin sera plein.

En 1 minute la 1re fontaine remplit $\frac{1}{8}$ de la capacité ;
la 2e ..... $\frac{1}{6}$;
la 3e ..... $\frac{1}{5}$.

Les trois fontaines coulant donc ensemble pendant 1 minute, le bassin aura reçu $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}$ de sa capacité, ou $\frac{30}{240}+\frac{40}{240}+\frac{48}{240}$, ou $\frac{118}{240}$.

Puisqu'il reçoit les $\frac{118}{240}$ en 1 minute, il se remplirait 118fois en 240 minutes ;

et par suite un fois en $\frac{240\text{minutes}}{118}$.

Un navire a 100 hommes d'équipage, et des vivres pour 120 jours ; au bout de 20 jours de traversée il reçoit un coup de mer, ce qui allongera probablement la traversée de 25 jours. De combien faut-il diminuer la ration pour que les vivres puissent suffire ? Comme on a embarqué 1 ration par homme et par jour, on avait donc en partant :

100×120 ou 12000 rations. On en a en 20 jours consommé 2000 ; il en restait à bord 10000 le jour de l'accident, et elles doivent suffire pour 125 jours ; donc on n'aura plus par jour à consommer que $\frac{10000r}{125}$, ou 80r, qui doivent suffire à 100h ; chacun recevra donc par jour $\frac{80r}{100}$ ou $\frac{8}{10}$ de ration.

Quel est le nombre dont les $\frac{5}{7}$ valent 420 ?

Puisque les $\frac{5}{7}$ valent 420, un seul septième fait $\frac{420}{5}$, ou 84.

Les $\frac{7}{7}$ ou le nombre lui-même est égal à 84×7, ou 588.

Quel est le nombre qui surpasse ses $\frac{5}{7}$ de 310 ?

Comme tout nombre est composé de 7 septièmes, 310 valent donc ses $\frac{2}{7}$.

Le nombre proposé est donc $\frac{310 \times 7}{2}$, ou 1085.

Une salle de 60 décimètres de longueur, 32 de large, doit être parquetée avec des planches de 6 décimètres de largeur sur 20 de longueur. Combien en faudra-t-il employer ?

Si les planches avaient

60 déclm. de long sur 32 de large, il en faudrait 1 ;
de 1 déclm. de long sur 32 de large, il en faudrait 60;
de 1..... 1..... 60×32;
de 20..... 1..... $\frac{60 \times 32}{20}$;
de 20..... 6..... $\frac{60 \times 32}{20 \times 6}$ ou 16.

Une marchande de volaille vend, avant d'arriver à la ville, moitié de ses poulets, plus un demi-poulet; à la porte de la ville, la moitié de ses poulets restants, plus un demi-poulet.

Dans la ville, la moitié de ses poulets restants, plus un demi-poulet. Elle arrive au marché avec 36 poulets. Combien en avait-elle en partant?

Puisqu'elle arrive avec 36 poulets, avant sa dernière distribution, elle en avait un nombre dont 36 est la moitié diminuée d'une demi; il était donc 2 fois $(36 + \frac{1}{2})$ ou 73, dont elle a laissé 37 en passant.

Puisqu'elle possédait 73 poulets après avoir passé la porte, elle avait avant 2 fois $(73 + \frac{1}{2})$ ou 147 poulets. En partant de chez elle, elle avait donc 2 fois $(147 + \frac{1}{2})$ ou 295 poulets.

La somme de deux nombres est 16, leur différence 4 : les trouver tous deux. Si on partageait 16 en 2 parties égales à 8, leur différence serait zéro. Pour la rendre égale à 4, il faut donc augmenter l'un de ces nombres de 2, et diminuer d'autant l'autre, pour que, leur différence devenant 4, leur somme reste 16. Les deux nombres sont donc 10 et 6.

NOMBRES COMPLEXES.

ANCIENNES MESURES.

On se servait anciennement, en France, d'unités d'espèces différentes, qui n'avaient aucune origine fixe; sans relations entre elles, leurs subdivisions n'étaient pas assujetties à la même loi, et, par suite, les calculs à effectuer sur ces espèces de nombres nommés complexes étaient laborieux. Tels sont les inconvénients que le nouveau système a eu pour but de réformer.

Les unités principales anciennes étaient :

La toise, subdivisée en 6 parties égales nommées pieds; le pied, en 12 pouces; le pouce, en 12 lignes.

La livre poids, subdivisée en 16 onces; l'once, en 8 gros; le gros, en 72 grains.

La livre tournois, désignée par ce signe ^{tt}, se divisait en 20 sous; le sou, en 12 deniers.

Il y avait encore, pour les étoffes, l'aune, différant suivant les provinces;

Pour les distances terrestres, la lieue;

Pour les terrains, la perche et l'arpent;

Pour les capacités, le boisseau, le setier, etc.;

Pour les liquides, la pinte, la velte, etc.

Les rapports des anciennes mesures les plus légales aux nouvelles ont été cherchés, et l'on a trouvé

$$\text{que } 1^{\text{m}} = 3^{\text{p}}\ 0^{\text{p}}\ 11^{\text{l}}\ \tfrac{296}{1000};$$
$$\text{que } 80^{\text{f}} \text{ valent } 81^{\text{tt}};$$
$$\text{et que } 1^{\text{k}} = 18827{,}15 \text{ grains.}$$

Ce ne sont là que les principales, c'est-à-dire, celles sur lesquelles on peut avoir l'occasion d'opérer.

La circonférence est divisée en 360 parties égales, nommées degrés; chacun de ces degrés étant lui-même partagé en 60 parties

égales, nommées minutes; chaque minute divisée en 60 parties égales, nommées secondes.

On voit que le degré n'a pas de longueur fixe, et qu'il dépend de la grandeur de la circonférence, dont il est la 360e partie.

La circonférence de la terre étant composée de 360°, on a nommé lieue marine la vingtième partie d'un degré. La lieue marine est divisée en trois parties égales, nommées milles.

Puisque 20 lieues sont la longueur de l'arc de 1° terrestre,

1 lieue est la longueur de la 20e partie du degré, ou de l'arc de 3 minutes;

1 mille est donc la longueur de l'arc de 1 minute.

D'après les dimensions de la terre, la lieue marine est de 2850 toises 41 centièmes. Par suite, le mille, tiers de la lieue, a pour longueur 950 toises 14 centièmes.

On nomme nombres complexes ceux formés d'unités d'une certaine espèce et de ses subdivisions, liées les unes aux autres et à l'unité principale par une relation autre que celle décimale. Ainsi, 2^t 3^p 7^p 8^l. 3^h 5^s 7^d, sont des nombres complexes.

ADDITION DES NOMBRES COMPLEXES.

Pour pouvoir additionner des nombres complexes, il faut qu'ils soient essentiellement tous de la même espèce. On suit alors la même règle que pour les nombres entiers; seulement, au lieu de retenir une unité de la colonne à gauche pour chaque dizaine de celle sur laquelle on opère, on retient le nombre d'unités nécessaires pour en composer une de la colonne suivante. Exemple :

7^t	3^p	5^p	7^l
8	2	4	6
5	4	3	9
21^t	4^p	1^p	10^l

SOUSTRACTION DES NOMBRES COMPLEXES.

Dans la soustraction des nombres complexes, on suit le même procédé que pour les nombres entiers. S'il y a des emprunts à effectuer, au lieu de valoir dix unités de l'ordre sur lequel on opère,

ils dépendent du mode de dérivation des subdivisions les unes des autres. Si enfin on est obligé, pour effectuer les emprunts, de passer par-dessus des zéros, ils prennent, au lieu de la valeur 9, une valeur qui dépend de la loi de dérivation des diverses subdivisions de l'unité principale. Exemples :

												5	11		
	5^t	3^p	7°	8^l		15^{ft}	7^s	4^d		5^t	0^p	0°	5^l
	2^t	1^p	4°	3^l		8^{ft}	12^s	6^d		3^t	2^p	4°	6^l
reste	3^t	2^p	3°	5^l	reste	6^{ft}	14^s	10^d	reste	1^t	3^p	7°	11^l

MULTIPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES.

1 toise d'ouvrage coûtant $3^{ft}\ 7^s\ 8^d$, combien coûteront $5^t\ 4^p\ 7^o\ 9^l$?

On trouvera donc le résultat en le composant d'autant de fois $3^{ft}\ 7^s\ 8^d$ qu'il y a d'unités et parties d'unité dans $5^t\ 4^p\ 7^o\ 9^l$. C'est l'idée qu'il faut attacher à la multiplication des nombres complexes.

D'après la définition de l'opération nommée multiplication, le produit doit être de même espèce que le multiplicande, et le multiplicateur être considéré comme abstrait.

Dans le cas actuel, ce dernier est donc $5+\frac{4}{6}+\frac{7}{72}+\frac{9}{864}$ ou $\frac{4985}{864}$. On l'obtient plus simplement en réduisant le nombre complexe en unités de sa plus petite espèce, et lui donnant pour dénominateur le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espèce est contenue dans la plus grande.

L'opération est alors ramenée à la multiplication du nombre $3^{ft}\ 7^s\ 8^d$, soit par le nombre abstrait $\frac{4985}{864}$, soit par le nombre $5+\frac{4}{6}+\frac{7}{72}+\frac{9}{864}$.

La 1re s'effectuerait en réduisant $3^{ft}\ 7^s\ 8^d$ en deniers, c'est-à-dire, 812^d, et l'on aurait $\frac{812^d\times 4985}{864}$.

La 2e exigerait les multiplications partielles de 812^d par les nombres 5, $\frac{4}{6}$, $\frac{7}{72}$, $\frac{9}{864}$, successivement.

Ces diverses méthodes exigent des opérations laborieuses; on y a substitué celle dite des parties aliquotes.

A cet effet, on a partagé la fraction $\frac{4}{6}$ en deux autres, ayant pour numérateurs l'unité, ce qui donne $\frac{3}{6}$ et $\frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$; la fraction $\frac{7}{72}$ a été elle même partagée en $\frac{6}{72}$, ou $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{72}$; ainsi de suite.

En conséquence, on multiplie d'abord tout le multiplicande par 5, ensuite par $\frac{1}{2}$, en en prenant la moitié; puis par $\frac{1}{6}$, en prenant le $\frac{1}{3}$ du résultat précédent; par $\frac{1}{12}$, en prenant la moitié du précédent, et ainsi de suite.

On dispose le calcul de la manière suivante :

	3^{ft} ...	7^{s}	8^{d}	
	5^{t}	4^{p}	7^{p}	9^{l}
Prix de 5^{t}....	16	18	4	
Prix de 3^{p}....	1	13	10	
Prix de 1^{p}....	0	11	3	$\frac{1}{3}$
Prix de 6^{p}....	0	5	7	$\frac{2}{3}$
Prix de 1^{p}....	0	0	11	$\frac{5}{18}$
Prix de 6^{l}....	0	0	5	$\frac{23}{36}$
Prix de 3^{l}....	0	0	2	$\frac{59}{82}$
	19^{ft}....	10^{s}	8^{d}....	$\frac{53}{72}$

Ce serait commettre une faute grave que de réduire le multiplicateur en unités de sa plus petite espèce : ainsi, $6^{ft} \times 5^{ft} = 30^{ft}$; tandis qu'en traduisant les deux facteurs en sous, on aurait $120^{s} \times 100^{s}$, ou $12000^{s} = 600^{ft}$.

Le multiplicateur devant être considéré comme abstrait, ne pouvait se transformer.

Puisque le produit est de même espèce que le multiplicande, on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des facteurs complexes, à moins qu'ils ne soient de la même espèce.

DIVISION DES NOMBRES COMPLEXES.

3 toises 4 pieds 5 pouces coûtent 15^{ft} 7^{s} 10^{d}; combien 1^{t} coûte-t-elle ?

Si on disait seulement : 3 toises coûtent 15^{ft}, combien coûte 1 toise? il faudrait diviser 15^{ft} par 3.

De même donc, dans le cas présent il faut diviser 15^{ft} 7^{s} 6^{d} par 3 toises 4 pieds 5 pouces. La division des nombres complexes est toujours amenée par une question à résoudre. D'après la définition de la division, le quotient doit être de l'espèce du dividende, produit des deux facteurs diviseur et quotient.

Le moyen le plus simple de rendre compte de l'opération consiste à réduire le dividende et le diviseur en expressions fractionnaires de leur unité principale, et à effectuer la division de ces deux expressions abstraites, en faisant exprimer à leur quotient des unités de l'espèce du dividende. L'exemple ci-dessus se ramène à

$$\frac{3698^{\text{fr}}}{240} : \frac{283}{72} = \frac{3698^{\text{fr}} \times 72}{240 \times 283} = \frac{266256^{\text{fr}}}{67920} = 3^{\text{fr}}\ 18^{\text{s}}\ 8^{\text{d}}.$$

Si le dividende et le diviseur étaient de la même espèce, le quotient ne serait plus forcé d'être de l'espèce du dividende, mais bien de celle exigée par l'énoncé. L'opération se ramènerait alors à une division de nombres entiers, en réduisant les deux nombres en unités de la même plus petite espèce, et n'imposant pas de dénominateurs, puisqu'ils seraient les mêmes. Ainsi :

$$\frac{8^{\text{t}}\ 4^{\text{p}}}{3^{\text{t}}\ 2^{\text{p}}\ 5^{\text{o}}} = \frac{624^{\text{l}}}{72} : \frac{245^{\text{l}}}{72} = 624 : 245.$$

CONVERSION DES NOUVELLES MESURES EN ANCIENNES, ET RÉCIPROQUEMENT.

Convertir en mètres $3^{\text{t}}\ 5^{\text{p}}\ 7^{\text{o}}\ 9^{\text{l}}$.

Puisqu'un mètre est égal à $0^{\text{t}}\ 3^{\text{p}}\ 0^{\text{o}}\ 11^{\text{l}}\ \frac{296}{1000}$, on a donc $1^{\text{m}} = \frac{443296^{\text{l}}}{1000}$. Donc 1000^{m} valent 443296^{l}, et par suite 1 ligne vaut $\frac{1000^{\text{m}}}{443296}$. Donc, les 3405^{l} qui constituent le nombre proposé se transforment en $\frac{1000^{\text{m}} \times 3405}{443296}$.

Convertir $17^{\text{m}},345$ en toises, pieds, pouces et lignes.

Puisqu'un mètre vaut $\frac{443296^{\text{l}}}{1000}$, $17^{\text{m}},345$ vaudront $\frac{443296^{\text{l}} \times 17,345}{1000}$.

Convertir $17^{\text{fr}}\ 8^{\text{s}}\ 7^{\text{d}}$ en francs et centimes.

Puisque 81^{fr} valent 80^{f},

1^{fr} vaut $\frac{80^{\text{f}}}{81}$. Donc $17^{\text{fr}}\ 8^{\text{s}}\ 7^{\text{d}}$ vaudront

$$\frac{80^{\text{f}} \times 17^{\text{fr}}\ 8^{\text{s}}\ 7^{\text{d}}}{81} = \frac{80^{\text{f}} \times \frac{4186}{240}}{81} = \frac{80^{\text{f}} \times 4186}{81 \times 240} = 17^{\text{f}},22.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer la marche à suivre dans toutes les questions analogues.

Les quatre opérations fondamentales sur toutes les espèces de nombres analysées précédemment, et les questions diverses qu'on a pu résoudre par leur secours, constituent, à notre sens, l'arithmétique proprement dite. Lorsqu'on veut pénétrer dans la constitution intime des nombres et dans les propriétés des proportions,

progressions, logarithmes, il faut s'aider de l'analyse qui constitue une des branches de l'algèbre.

Telle est la raison qui nous fera placer ici les notions les plus élémentaires de l'algèbre avant d'étudier les qualités particulières des nombres, que, par un abus de mots, on regarde comme dépendantes de l'arithmétique. Ne pas utiliser le raisonnement algébrique pour les découvrir, c'est se priver d'une ressource précieuse, et il n'y a pas d'admiration à accorder à un travail, si, par un effort de patience, il a été accompli laborieusement en l'absence des instruments qui l'eussent produit plus parfait à moins de peine.

CONVERSION DU TEMPS EN DEGRÉS,

ET RÉCIPROQUEMENT

Une circonférence qui est composée de 360 degrés est parcourue en 24 heures : quel est l'arc qui sera parcouru en $5^h\ 7^m\ 25^s$?

Puisqu'en 24^h on parcourt 360 degrés,

en 1^h on parcourt $\frac{360^\circ}{24}$ ou 15 degrés ;
en 1^m id. $\frac{15^\circ}{60}$ ou $\frac{1}{4}^\circ$ ou 15 minutes de degré ;
en 1^s id. $\frac{15'}{60}$ ou $\frac{1}{4}'$ ou 15 secondes de degré.

Dans $5^h\ 7^m\ 25^s$ on aura donc parcouru

$$15^\circ \times 5 + 15' \times 7 + 15'' \times 25, \text{ ou } 75^\circ + 105' + 375''.$$

La seconde de ces parties constitue $1^\circ + 45'$, et la troisième $6' + 15''$. Le résultat final est donc $76^\circ\ 51'\ 15''$.

Cette opération, très-usuelle pour les marins, peut s'abréger par suite de certaines observations qui donnent lieu à des simplifications.

En multipliant le nombre des heures par 15, on a des degrés : 1^m valant $\frac{1}{4}^\circ$, 7^m valent $\frac{7}{4}^\circ$; donc, en prenant le quart des minutes de temps, on a aussi des degrés, et le reste de cette opération, multiplié par 15, donne des minutes de degré.

Par la même raison, le quart des secondes de temps donne des minutes de degré, et le reste de cette division, multiplié par 15, exprime des secondes de degré.

En résolvant ainsi la question précédente,

on trouve..... 5^h 75°
7^m 1° $45'$
25 $6'$ $15''$
76° $51'$ $15''$

C'est ce qu'en marine on nomme réduire le temps en degrés.

Réciproquement, pour parcourir un arc de 16° $18'$ $54''$, combien mettra-t-on de temps ?

Puisque pour 360° on emploie 24^h
pour 1° ..... $\frac{24^h}{360}$ ou 4^m
pour $1'$ ..... $\frac{240^s}{60}$ ou 4^s
pour $1''$ ..... $\frac{240^t}{60}$ ou 4^t
donc, pour 16° on emploiera 16^{fois} 4^m ou 64^m 1^h 4^m
pour $18'$ ..... 18^{fois} 4^s ou 72^s 0 1^m 12,
pour $54''$ ..... 54^{fois} 4^t ou 216^t 0 0^m 3 36^t
1^h 5^m 15^s 38^t

Cette opération se modifie de la manière suivante :

Divisez le nombre de degrés par 15, le quotient exprimera des heures ; le reste, multiplié par 4, donnera des minutes de temps. Divisez par 15 le nombre des minutes de degré, pour avoir encore des minutes de temps. Le reste, multiplié par 4, donnera des secondes de temps, et ainsi de suite.

La raison de cette simplification est facile à apercevoir, puisque 15 degrés correspondent à une heure, 15 minutes de degré à une minute de temps, etc.

La 120e partie du myriamètre est d'environ 83^m.

La 120e partie de l'heure est de 30 secondes.

Autant donc on aura parcouru de 83^m en 30 secondes, autant par heure on aura parcouru de myriamètres.

On demande combien on aura parcouru de myriamètres par heure, sachant que dans 26 secondes on a parcouru 4 longueurs de 75^m.

Puisqu'en 26 secondes on a fait 4 longueurs,
en 1 seconde ..... $\frac{4}{26}$
en 30 secondes ..... $\frac{4\times30}{26}$ de 75^m,
on aurait fait dans le même temps $\frac{4\times30\times75}{26}$ long. de 1^m ;
et enfin en 30 secondes ..... $\frac{4\times30\times75}{26\times83}$ long. de 8^m ou $4^l,17$.

Cette question se représentera plus tard sous une forme analogue.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

L'algèbre a pour but principal de découvrir les lois suivant lesquelles un résultat est formé des données d'une question.

Pour y parvenir, elle cherche le plus possible à éviter le mélange des quantités, et à cet effet elle représente les nombres donnés par des lettres qui s'unissent les unes aux autres à l'aide des signes $+$, $-$, $\times$, $:$, déjà inventés en arithmétique.

Ainsi $a+b$, $a-b$, $a\times b$, $a:b$ indiquent l'addition, la soustraction, la multiplication, la division des deux nombres a et b.

La troisième de ces expressions s'écrit ab, en convenant de ne mettre aucun signe entre des facteurs. Ainsi, abc exprime le produit des trois facteurs a, b et c; l'expression $a+a+a$ se réduit à cette autre, $3a$. Ce nombre 3 qui précède une lettre se nomme *coefficient*, et l'on peut regarder $3a$ comme voulant dire à volonté, soit $a+a+a$, soit $3\times a$. C'est ainsi que les nombres se mêlent aux lettres dans les calculs algébriques.

L'expression $5ab$ veut donc dire $5\times a\times b$ ou $ab+ab+ab+ab+ab$. Lorsque plusieurs facteurs sont égaux, tels que $a\times a\times a\times a\times a$, on est convenu, pour simplifier cette expression, d'écrire la lettre a une seule fois, et à sa droite, un peu au-dessus, un nombre qui exprime combien de fois elle est facteur, c'est-à-dire, a^5.

Le nombre 5 ainsi placé se nomme *exposant*, et appartient exclusivement à la lettre à droite de laquelle il est écrit. Ainsi, dans l'expression $5ab$, le coefficient 5 appartient aussi bien à a qu'à b; tandis que, dans l'expression ab^5, l'exposant 5 n'a aucun rapport avec la lettre a.

L'expression $5a^2b^3$, qui se nomme un seul terme, ou un monôme, est, d'après les conventions qui précèdent, le résultat de la simplification de cette autre :

$$a\times a\times b\times b\times b+a\times a\times b\times b\times b+a\times a\times b\times b\times b+a\times a\times b\times b\times b+a\times a\times b\times b\times b.$$

Deux termes séparés par l'un des signes + ou — constituent un binôme, tel que $2a^3 + 5ab$.

Trois termes forment un trinôme, tel $2a^2 - 5ab^2 + 4b^2$; et enfin l'expression composée d'un nombre quelconque de termes prend le nom de polynôme.

L'ordre dans lequel on écrit les termes d'un polynôme n'a pas d'influence sur la valeur qu'il prendra, lorsqu'à chacune de ses lettres on aura substitué un nombre; et on doit entendre par valeur d'un polynôme le résultat de cette substitution.

En effet, $12 + 5 - 7 + 2 - 6$ est bien égal à $12 + 5 + 2 - 7 - 6$ ou à 6.

On dit donc que la valeur d'un polynôme se compose de la somme des termes additifs, diminuée de la somme ou réunion des termes soustractifs. Bien que le signe moins soit inventé pour placer entre deux quantités qui doivent être retranchées l'une de l'autre, cependant il peut exister devant une quantité isolée, comme exprimant le reste d'une soustraction dans laquelle le nombre à retrancher était plus grand que celui dont on le retranchait; ainsi $5 - 8 = 5 - 5 - 3$, ou simplement -3.

On peut donc regarder le signe qui précède un terme dans un polynôme comme attaché à ce terme, et en étant un des éléments constitutifs.

On nomme termes semblables ceux qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, les signes et les coefficients n'influant pas sur la similitude; ainsi $3a$ et $5a$ sont des termes semblables, ainsi que $3a^2b^3$ et $-5a^2b^3$.

Les termes $3a^2b$ et $5ab^2$ ne sont pas semblables, parce que ce ne sont pas les mêmes lettres qui sont affectées des mêmes exposants.

Des termes semblables peuvent toujours se réduire à un seul, d'après les principes de l'arithmétique élémentaire, ainsi :

$$3a^2b + 7a^2b + 2a^2b = 12a^2b.$$
$$3a^2b - 7a^2b - 2a^2b = -6a^2b.$$

Afin de pouvoir faire occuper aux différents termes d'un polynôme toutes les places possibles, et se créer par là une ressource pour l'avenir, il faut que le premier terme porte un signe comme tous les autres, quoique n'étant précédé d'aucune quantité. Seulement on est convenu de ne pas écrire ce signe lorsqu'il est positif.

Une lettre unique isolée, telle que a, doit être considérée comme possédant le coefficient 1 et l'exposant 1; c'est ce qui fait dire qu'il n'y a pas de terme qui ne soit muni de son coefficient et de son exposant : ainsi on peut regarder a comme voulant dire 1 fois a^1.

On utilise les petites lettres pour représenter les données d'une question, et les lettres majuscules sont réservées pour remplacer l'ensemble des termes d'une expression. Ainsi, pour abréger une explication, on représente quelquefois un polynôme $a^3 - 2a^2 + 2ab - b^2$ par la lettre unique A.

On peut aussi employer la lettre majuscule pour représenter un monôme complet, tel que $3a^2b^3$.

ADDITION DES POLYNOMES.

L'addition des polynômes ayant pour but d'en réunir plusieurs en un seul de même valeur que leur ensemble, il en résulte que les termes tant additifs que soustractifs des différents polynômes doivent être encore tels dans le résultat; de là cette règle générale.

On effectue l'addition de plusieurs polynômes en les écrivant à la suite les uns des autres, et conservant à chaque terme le signe qui lui était propre.

Ainsi l'addition suivante : $2a^3 - 5a^2b + 2ab^2 - 4b^3$,
$5ab^2 + 5b^3 - 6a^3 + 2a^2b$,
$6a^2b - 2ab^2 + 4a^3 - 7b^3$,

donne pour résultat le polynôme :

$$2a^3 - 5a^2b + 2ab^2 - 4b^3 + 5ab^2 + 5b^3 - 6a^3 + 2a^2b + 6a^2b - 2ab^2 + 4a^3 - 7b^3.$$

Ce polynôme peut se simplifier en réunissant entre eux tous les termes semblables.

Ainsi : $+ 2a^3 - 6a^3 + 4a^3$ se réduisent à zéro ou se détruisent.
$- 5a^2b + 2a^2b + 6a^2b$ se réduisent à $+ 3a^2b$,
$+ 2ab^2 + 5ab^2 - 2ab^2$ se réduisent à $+ 5ab^2$,
$- 4b^3 + 5b^3 - 7b^3$ se réduisent à $- 6b^3$.

La somme simplifiée est donc $3a^2b + 5ab^2 - 6b^3$.

La simplification s'applique au résultat de toute opération, et ne fait nullement partie de l'addition.

SOUSTRACTION DES POLYNOMES.

Si de $A + B - C$
on doit retrancher $M - N + D$,
on fera le raisonnement suivant :

Si de $A + B - C$ on retranche M seulement, on aura $A + B - C - M$.

Mais ce n'était pas M à retrancher, mais bien M diminué de N; la quantité soustraite est donc trop grande de N, et le reste par suite trop petit de N : on le rétablira dans sa valeur en écrivant $A + B - C - M + N$.

Mais la quantité à retrancher était $M - N$ augmenté de D : en retranchant donc $M - N$ on a un résultat trop grand de D. Le reste véritable est donc :

$$A + B - C - M + N - D.$$

Si on compare ce résultat aux polynômes qui l'ont fourni, on peut en conclure cette règle générale :

Pour faire la soustraction de deux polynômes, il faut les écrire à la suite l'un de l'autre, en conservant au premier ses signes, et changeant ceux de tous les termes du second. Ainsi :

$5a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3$ diminué de $3b^3 - 2ab^2 + 4a^3 - 3a^2b$, donne pour reste : $5a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3 - 3b^3 + 2ab^2 - 4a^3 + 3a^2b$, qui se réduit par la simplification à $a^3 - a^2b + 8ab^2 - 5b^3$.

MULTIPLICATION DES POLYNOMES.

Soit à former le produit des deux polynômes $A + B + C$; $M + N + P$.

Le produit de $A + B + C$ par M, d'après les principes arithmétiques et les conventions algébriques, sera $AM + BM + CM$.

Le produit du même polynôme par $M + N$ doit être égal au précédent augmenté du polynôme $AN + BN + CN$, puisqu'on a augmenté le multiplicateur de N unités, ainsi de suite ; d'où il résulte que le produit de deux polynômes se compose d'autant de produits partiels qu'il y a de termes dans le multiplicateur, chacun d'eux renfermant autant de termes qu'il y en a dans le multi-

plicande. On voit que le produit de deux polynômes se forme des produits successifs de leurs différents termes. Il faut donc étudier d'abord les règles de la multiplication des monômes, et cette opération sera en algèbre ce qu'est la table de Pythagore en arithmétique.

MULTIPLICATION DES MONOMES.

On doit considérer des monômes complets, c'est-à-dire munis de leurs signes, puisque, sans nul doute, les signes qui séparent les termes du produit dépendent de ceux qui précédaient les facteurs.

Règle des signes. On est convenu d'attribuer le signe + au produit de deux termes précédés du même signe, et le signe — au produit de ceux précédés de signes contraires.

Ainsi, $+a \times +b = +ab \quad -a \times -b = +ab,$
$+a \times -b = -ab \quad -a \times +b = -ab.$

Il est bien entendu qu'on ne fait pas le produit des signes, la multiplication étant une opération qui, d'après sa définition, ne peut s'exécuter que sur des quantités. Comme conséquence de la règle des signes, on voit que le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif, et que le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs est négatif; qu'on ne change pas le signe d'un produit en changeant le signe d'un nombre pair de facteurs.

Règle des coefficients. Soit à effectuer le produit de $3a$ par $5b$, on a :

$$3a = 3 \times a, \quad 5b = 5 \times b;$$

donc $3a \times 5b = 3 \times a \times 5 \times b = 3 \times 5 \times a \times b = 15ab;$
résultat obtenu en s'appuyant uniquement sur la signification du coefficient et sur l'inversion des facteurs. On peut conclure de là que les coefficients doivent être multipliés entre eux, quelles que soient les lettres qui les accompagnent.

Règle des exposants. Soit à multiplier a^2 par a^3. En se reportant à la signification de l'exposant, on a :

$$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5,$$

ce qui fait voir, en comparant ce produit à ses facteurs, qu'il faut, dans la multiplication des monômes, ajouter les exposants des lettres pareilles.

Si les lettres étaient dissemblables, la combinaison précédente serait sans application, et le produit de a^2 par b^3 est a^2b^3.

Il est donc bien de remarquer que la règle des coefficients s'applique toujours, alors que celle des exposants exige la parité des lettres.

D'après ce qui précède, on a $+5a^2b^3 \times -2a^3b = -10a^5b^4$.

Le signe $\times$ serait insuffisant pour indiquer la multiplication de deux polynômes ; ainsi $a+b \times c+d$ indique que b seul est multiplié uniquement par c. On est convenu d'employer à cet usage deux parenthèses renfermant l'une un des polynômes, l'autre le second polynôme, et de n'écrire aucun signe entre les deux parenthèses, d'après une convention déjà faite.

L'expression $(a+b)\ (c+d)$ indique donc le produit de $(a+b)$ par $(c+d)$.

MULTIPLICATION DES POLYNOMES.

Il est indifférent de commencer cette opération par la droite ou par la gauche, puisque les termes d'un polynôme n'ont pas de valeur relative.

On procède, par habitude, de la gauche à la droite.

Exemples :

$$
\begin{array}{l}
8a^3b + 6a^2b^2 - 4a^4 + 6ab^3 - 2b^4 \\
2a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - 4b^3 \\
\hline
16a^6b + 12a^5b^2 - 8a^7 + 12a^4b^3 - 4a^3b^4 \\
- 24a^5b^2 - 18a^4b^3 + 12a^6b - 18a^3b^4 + 6a^2b^5 \\
+ 16a^4b^3 + 12a^3b^4 - 8a^5b^2 + 12a^2b^5 - 4ab^6 \\
- 32a^3b^4 - 24a^2b^5 + 16a^4b^3 - 24ab^6 + 8b^7 \\
\hline
+ 28a^6b - 20a^4b^2 - 8a^7 + 26a^4b^3 - 42a^3b^4 - 6a^2b^5 - 28ab^6 + 8b^7.
\end{array}
$$

On a fait ici la simplification en même temps que l'addition des quatre produits partiels, et l'on voit que tous les termes ont donné des simplifications, à l'exception des deux termes : $8a^7$ et $8b^7$.

Il eût été possible, en opérant, de placer les termes du second produit partiel sous leurs semblables du premier, et ainsi pour les autres produits partiels. Par là, les termes semblables se fussent

trouvés distribués dans des colonnes verticales, et par suite les réductions eussent été plus faciles à effectuer.

Mais on arrive encore plus simplement à un résultat analogue en écrivant les termes du multiplicande et du multiplicateur dans un ordre tel que les exposants d'une lettre choisie, a, par exemple, diminuent au moins d'une unité depuis le premier terme jusqu'au dernier. Exemple :

$$
\begin{array}{l}
-4a^4 + 8a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 - 2b^4 \\
\quad 2a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - 4b^3. \\
\hline
-8a^7 + 16a^6b + 12a^5b^2 + 12a^4b^3 - 4a^3b^4 \\
\qquad + 12a^6b - 24a^5b^2 - 18a^4b^3 - 18a^3b^4 + 6a^2b^5 \\
\qquad\qquad - 8a^5b^2 + 16a^4b^3 + 12a^3b^4 + 12a^2b^5 - 4ab^6 \\
\qquad\qquad\qquad + 16a^4b^3 - 32a^3b^4 - 24a^2b^5 - 24ab^6 + 8b^7. \\
\hline
-8a^7 + 28a^6b - 20a^5b^2 + 26a^4b^3 - 42a^3b^4 - 6a^2b^5 - 28ab^6 + 8b^7.
\end{array}
$$

En reculant chaque produit partiel d'un terme vers la gauche, les termes semblables se sont trouvés naturellement disposés.

Il n'en faut pas conclure qu'il en serait toujours ainsi.

Cela a tenu, dans l'exemple précédent, à ce que les exposants de a ne diminuaient que d'une unité d'un terme au suivant, depuis le premier terme jusqu'au dernier dans chacun des facteurs, et aussi à ce que la somme des exposants de a et b dans chaque terme était constante dans toute l'étendue de chaque polynôme, nommés homogènes par suite de cette particularité.

On peut remarquer que deux termes seulement représentent, dans le résultat, le produit d'un terme du multiplicande par un du multiplicateur : ce sont le premier et le dernier. Tous les autres du produit sont des combinaisons de termes des divers produits partiels. Le produit des deux termes ayant les plus grands exposants de a ne peut rencontrer de termes semblables ; il en est de même pour le produit des deux termes renfermant a avec le moindre exposant. Les autres termes du produit pourraient ne pas avoir subi de réduction, ce qui ne peut se décider à priori. Cas particuliers.

Lorsqu'on multiplie un monôme par lui-même, $3a^2b$ par exemple, on obtient $9a^4b^2$, expression nommée carré de $3a^2b$. Par opposition, $3a^2b$ se nomme la racine de $9a^4b^2$. Extraire la racine de $9a^4b^2$, c'est donc décomposer ce monôme en deux facteurs identiques.

On voit que le carré d'un monôme s'obtient en élevant le coef-

ficient au carré, et doublant chaque exposant, qui, par suite, est pair dans le résultat.

En élevant au carré $-3a^2b$, on trouve, comme précédemment, $9a^4b^2$; d'où l'on conclut qu'un carré est toujours précédé du signe $+$. Par conséquent un monôme ne saurait être un carré s'il était précédé du signe $-$, si son coefficient n'était pas un carré, enfin si un des exposants de ses lettres n'était pas pair.

En élevant au carré le binôme $(a+b)$, on obtient

$$a^2+2ab+b^2.$$

Si on prenait le binôme $3a^2b+5ab^2$, on trouverait

$$9a^4b^2+30a^3b^3+25a^2b^4.$$

On déduit de là que le carré d'un binôme se compose toujours de trois termes, savoir :

Le carré du premier terme du binôme;

Le double produit du premier terme du binôme par le second;

Le carré du second terme du binôme.

Si les deux termes étaient séparés par le signe $-$, le second terme du carré serait précédé du signe $-$. Ainsi

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Il résulte donc de ce qui précède qu'un trinôme ordonné ne peut être un carré qu'autant qu'il remplit les conditions suivantes :

1° que son premier terme soit un carré;

2° que son troisième terme soit un carré;

3° que son second terme soit le double produit de la racine du premier par la racine du troisième.

Lorsque ces trois conditions sont remplies, on obtient sa racine en extrayant la racine du premier terme, celle du troisième, et les séparant par le signe qui précède le deuxième terme du carré.

On extrait la racine d'un monôme en extrayant la racine du coefficient et dédoublant chaque exposant. Exemples :

$4a^4-12a^2b^2+9b^4$. Ce trinôme est le carré de $2a^2-3b^2$.

$5a^4-12a^2b^2+9b^4$ n'est pas un carré, parce que 5 n'est point un carré.

$4a^4-10a^2b^2+9b^4$ n'est pas un carré, parce que $10a^2b^2$ n'est pas le double produit des racines de $4a^4$ et de $9b^4$.

Lorsqu'on multiplie $a+b$ par $a-b$, ou la somme de deux

quantités par leur différence, on obtient $a^2 - b^2$; on a donc l'égalité

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Et l'on dit que le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence de leurs carrés. Réciproquement donc, la différence de deux carrés est le produit de la somme de leurs racines par la différence des mêmes racines.

Ainsi, on peut de suite écrire sans opération $(2a+3b)(2a-3b) = 4a^2 - 9b^2$, et aussi $4a^2 - 9b^2$, différence de deux carrés égale à $(2a+3b)(2a-3b)$.

Tel est le moyen le plus élémentaire que possède l'algèbre pour transformer un binôme en un produit de deux facteurs; mais, pour être utilisé, il est indispensable que le binôme soit la différence de deux carrés.

On peut quelquefois, en utilisant ce théorème, ainsi que la loi de composition du carré d'un binôme, transformer en produits des expressions composées de plus de deux termes; soit pour exemple le polynôme $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

Les trois premiers termes constituent le carré de $a+b$, et par suite l'expression revient à $(a+b)^2 - c^2$, différence de deux carrés qui se change par suite en cette autre expression :

$$(a+b+c)(a+b-c).$$

Cette décomposition ne saurait s'appliquer au polynôme

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2,$$

qui est l'expression de la somme et non de la différence de deux carrés.

On aurait

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a-b)^2 - c^2 = (a-b+c)(a-b-c).$$

Autre exemple : $c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2$ peut se mettre sous la forme $\left(c + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)$. Réduisant dans chaque parenthèse au même dénominateur, on obtient

$$\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b}\right).$$

Les trois premiers termes de la première parenthèse forment le carré

de $(b+c)$ et les trois de la seconde, moins le carré de $b-c$. On peut donc substituer à cette expression cette autre :

$$\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}\right).$$

Décomposant de nouveau le numérateur de chaque parenthèse,

$$\left(\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2}\right).$$

L'expression proposée est donc ainsi transformée en un produit de quatre facteurs.

DIVISION DES MONOMES.

Diviser les deux monômes $16a^4b^2$ et $8a^2$, l'un par l'autre, c'est trouver un nouveau monôme dont le produit par $8a^2$ soit $16a^4b^7$. Il y a donc lieu à chercher la règle des signes, celle des coefficients, celle des lettres et celle des exposants.

Règle des signes. Comme conséquence de ce qu'on a dit dans la multiplication, si le dividende a le signe $+$, le diviseur et le quotient doivent avoir le même signe.

Si le dividende a le signe $-$, le diviseur et le quotient doivent avoir des signes contraires.

D'où il résulte également que lorsque le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient a le signe $+$, et que lorsque le dividende et le diviseur ont des signes contraires, le quotient a le signe $-$.

Règle des coefficients. Le coefficient du dividende doit être le produit du coefficient du diviseur par celui du quotient ; ce dernier doit donc être le quotient du coefficient du dividende par celui du diviseur.

Règle des exposants. L'exposant d'une lettre dans le dividende doit être la somme des exposants de la même lettre dans le diviseur et le quotient. L'exposant d'une lettre du quotient doit donc être la différence des exposants de la même lettre dans le dividende et le diviseur. Exemple :

$$\frac{+18a^5b^2}{-3a^2b}=-6a^3b.$$

D'après les règles qui précèdent, si l'exposant d'une lettre dans le dividende était moindre que celui de la même lettre dans le di-

viseur, cette lettre aurait dans le quotient un exposant négatif.

Ainsi, $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$.

Mais si on avait simplifié arithmétiquement l'expression $\frac{a^2}{a^5}$ en enlevant aux deux termes le facteur commun a^2, on eût trouvé $\frac{1}{a^3}$; et comme il faut mettre d'accord les résultats entre l'arithmétique et l'algèbre, puisque les nombres interviennent dans cette dernière science, on doit donc admettre que a^{-3}, expression non susceptible d'interprétation analogue à celle de a^3, est une notation destinée à remplacer la fraction $\frac{1}{a^3}$. Si le coefficient du dividende n'était pas divisible exactement par celui du diviseur, le coefficient du quotient serait fractionnaire.

Si une lettre du diviseur n'était pas dans le dividende, elle serait au quotient en dénominateur.

Ces différents cas de quotients fractionnaires constituent ce qu'en algèbre on nomme impossibilité de la division.

Ainsi : $\frac{13a^5b^4}{3ab^2} = \frac{13}{3}a^4b^2$, division dite impossible, le quotient n'étant pas entier.

$$\frac{16a^2b^2}{4a^3b^2} = 4a^{-1} = \frac{4}{a}, \text{ impossible.}$$

$$\frac{16a^3}{4b^2} = 4\frac{a^3}{b^2}, \text{ impossible.}$$

On voit que le quotient devant se composer des facteurs du dividende non renfermés dans le diviseur, ne contiendra pas toute lettre qui entrerait dans le dividende et le diviseur avec le même exposant.

L'expression $\frac{a^3}{a^3}$, traitée arithmétiquement, conduit au quotient 1; algébriquement, au quotient a^0.

On doit donc admettre que toute lettre affectée de l'exposant zéro est l'expression algébrique de l'unité.

On divise un polynôme par un monôme, en divisant par le monôme successivement chacun des termes du polynôme ; cette règle

est une conséquence de l'addition des fractions de même dénominateur.

Car, $\frac{5a^2}{b} + \frac{4b^2}{b} - \frac{5ab^3}{b} = \frac{5a^2 + 4b^2 - 5ab^3}{b}$.

On a dit dans la multiplication qu'ordonner un polynôme, c'était écrire ses termes dans un ordre tel, que les exposants de la lettre d'ordre diminuassent au moins d'une unité d'un terme au suivant, depuis le premier terme jusqu'au dernier.

Il semble au premier aspect que cette disposition ne puisse pas s'appliquer aux polynômes qui renferment dans plusieurs de leurs termes la lettre d'ordre avec le même exposant.

Cette impossibilité disparaît lorsqu'on fait emploi du facteur commun analysé en arithmétique. Ainsi, le polynôme

$$3a^5 - 2a^4b + 6a^3b^2 + 4a^3b^2 - 6a^2b^4 + 5b^5 - 4b^6,$$

qui n'est point ordonné parce que les troisièmes et quatrièmes termes ont le même exposant de a, devient

$$3a^5 - 2a^4b + a^3(6b^2 + 4b^2) - 6a^2b^4 + (5b^5 - 4b^6),$$

et est ordonné en considérant les quantités entre parentheses comme composant un coefficient unique pour le facteur hors de la parenthèse.

Dans le dernier terme, le facteur commun est a^6 ou 1.

La transformation d'un polynôme en produit étant une des opérations les plus utiles, il convient de discuter ce principe, non comme un cas accidentel, mais comme un but à atteindre.

Une quantité ne changeant pas de valeur lorsqu'on lui fait subir simultanément deux opérations contraires, on peut écrire

$$A + B - C = \left(\frac{A + B - C}{D}\right) D.$$

Le facteur entre parenthèse peut subir des simplifications dépendantes des relations plus ou moins immédiates du facteur D avec les termes A, B, C du polynôme proposé.

Exemples. Transformer le polynôme $3a^2b + 6ab^2 - 9a^2b^3$ en un produit de deux facteurs dont l'un soit $3ab$. On aura

$$\left(\frac{3a^2b + 6ab^2 - 9a^2b^3}{3ab}\right) 3ab;$$

et, simplifiant le facteur entre parenthèse,

$$(a + 2b - 3a^2b^2)\, 3ab.$$

Dans ce cas, le facteur entre parenthèse est privé de tout dénominateur, parce que la quantité mise en facteur commun était réellement facteur dans chaque terme.

On pouvait parvenir directement au résultat dans ce cas au moyen de cette règle : Écrire le facteur commun à tous les termes, et le faire suivre d'une parenthèse dans laquelle on écrit le polynôme proposé, à chacun des termes duquel on a supprimé le facteur commun.

Si l'on voulait mettre une quantité arbitraire $2ab$ en facteur commun dans le polynôme $3a^2 - 5ab + 4b^2 - b^3$, on obtiendrait

$$2ab\left(\frac{3a^2 - 5ab + 4b^2 - b^3}{2ab}\right) \text{ ou } 2ab\left(\frac{3a}{2b} - \frac{5}{2} + \frac{2b}{a} - \frac{b^2}{2a}\right).$$

Lorsqu'une quantité a été mise en facteur commun, on voit qu'en changeant le signe du facteur hors parenthèse, et chacun de ceux des termes dans la parenthèse, l'expression ne subit aucune modification. Puisque tout polynôme peut s'ordonner, il y a toujours deux termes, le premier et le dernier, qui contiennent la lettre d'ordre, avec les exposants maximum et minimum.

Le produit de deux polynômes contiendra donc toujours au moins deux termes sans réduction, le premier et le dernier, si le multiplicande et le multiplicateur sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, ces deux termes étant sans modification le produit d'un terme du multiplicande, par un du multiplicateur.

Si donc on devait considérer $6a^3 - 2a^2b + 4ab^2 - 2b^3$ comme le produit de $3a^2 - 5ab + 4b^2$ par un facteur inconnu, on pourrait affirmer que $6a^3$ est le produit de $3a^2$ par le premier terme du quotient ordonné ; on pourrait faire le même raisonnement sur les deux derniers termes, mais non sur aucun de ceux intermédiaires.

Cas particulier. C'est sur ce principe qu'est fondée la division des polynômes. Cette opération n'ayant pas d'application usuelle dans la suite de ce cours, nous l'omettrons, et ne donnerons qu'un cas particulier.

Soit à diviser $a^5 - b^5$ par $a - b$. On disposera l'opération de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lr|l}
 & a^5 - b^5 & a - b \\
\cline{3-3}
 & -a^5 + a^4 b & a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 \\
\cline{2-2}
1^{er}\text{ reste}\ldots & a^4 b - b^5 & \\
 & -a^4 b + a^3 b^2 & \\
\cline{2-2}
2^{e}\text{ reste}\ldots & a^3 b^2 - b^5 & \\
 & -a^3 b^2 + a^2 b^3 & \\
\cline{2-2}
3^{e}\text{ reste}\ldots & a^2 b^3 - b^5 & \\
 & -a^2 b^3 + a, b^4 & \\
\cline{2-2}
4^{e}\text{ reste}\ldots & ab^4 - b^5 & \\
 & -ab^4 + b^5 & \\
\cline{2-2}
5^{e}\text{ reste}\ldots & 0. &
\end{array}
$$

On a divisé le premier terme du dividende par le premier du diviseur, ce qui a fourni le premier terme a^4 du quotient.

On a multiplié tout le diviseur par ce terme du quotient, et retranché ce produit du dividende en l'écrivant dessous, avec changement de signe pour chacun des termes. Simplifiant et ordonnant, on a le premier reste, qu'on peut considérer comme le produit du diviseur par l'ensemble des termes qui restent encore à trouver au quotient. C'est donc la même opération à continuer jusqu'à ce qu'on arrive ou au reste zéro, ou à un reste ordonné dont le premier terme ne soit plus divisible par le premier du diviseur, auquel cas la division est réputée impossible.

Dans le cas présent, elle s'est achevée exactement, et le quotient se présente sous la forme d'un polynôme homogène jouissant des qualités suivantes :

Le nombre des termes est égal au nombre des unités de l'exposant de a dans le dividende.

Tous les termes sont séparés par le signe $+$.

Les coefficients sont égaux à l'unité.

Les exposants de a diminuent d'une unité d'un terme au suivant; ceux de b augmentent d'une unité.

On peut donc, en suivant ces lois, écrire immédiatement le quotient de $a^3 - b^3$ par $a - b$; il sera $a^2 + ab + b^2$.

De même le quotient de $a^7 - b^7$ par $a - b$ sera

$$a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + ab^5 + b^6.$$

On voit que le quotient peut avoir beaucoup de termes, alors que

le dividende et le diviseur sont fort simples; c'est un fait qui ne se reproduit pas en arithmétique, où le quotient de deux nombres entiers de peu de chiffres ne peut jamais être composé de beaucoup de chiffres entiers.

ÉQUATIONS.

Il existe trois genres d'égalités: 1° l'identité; 2° l'égalité; 3° l'équation. $2 = 2$ est une identité; $7 = 4 + 3$ est une égalité; $2x = 5$ est une équation.

Dans la première expression, le signe $=$ veut dire est évidemment égal.

Dans la deuxième, le signe $=$ indique qu'il faut vérifier.

Dans la troisième, le signe $=$ veut dire qu'il faut rendre la première quantité égale à la deuxième.

Dans une équation, on nomme premier membre tout ce qui est avant le signe $=$; second membre, tout ce qui est après.

Ainsi, l'expression $6x = 12$, qu'on nomme une équation, ne veut pas dire que $6x$ est égal à 12, mais qu'il faut le rendre tel en attribuant à x une valeur convenable; trouver cette valeur, c'est résoudre l'équation.

L'équation se distingue donc de l'égalité par les inconnues qu'elle renferme, et pour la représentation desquelles sont réservées spécialement les lettres x, y, z.

Une égalité peut être fausse; une équation jamais, parce qu'il existe toujours un nombre ou une quantité qui, substituée à x, rend le premier membre égal au second.

Substituer dans une équation à son inconnue la valeur qui lui a été trouvée, c'est vérifier l'équation.

Une équation peut être soit numérique, soit littérale.

$2x = 6$ est une équation numérique.

$\left.\begin{array}{r} ax = b \\ 2ax = 3bc \end{array}\right\}$ sont des équations littérales.

Une équation peut avoir plusieurs inconnues.

$2x + 3 = 3x - 5$, équation à une seule inconnue.

$2x + 3 = 3y - 5$, équation à deux inconnues.

$2x + 3y = 2y + 5z - 4$, équation à trois inconnues.

Résolution de l'équation à une seule inconnue.

On peut effectuer la même opération sur les deux membres d'une équation, sans nuire à la valeur de son inconnue.

Exemples :

$$3x - 5 = 2x + 8.$$

Ajoutant 5 aux deux membres, elle devient

$$3x - 5 + 5 = 2x + 8 + 5.$$

Et, comme $+5$ du premier membre est égal à $+5$ du second, il suffit que $3x - 5$ devienne égal à $2x + 8$ pour que, dans les mêmes circonstances, $3x - 5 + 5$ soit égal à $2x + 8 + 5$.

Simplifiant, dans le 1er membre,

$$3x = 2x + 8 + 5;$$

retranchant $2x$ aux deux membres, opération dont la légalité se démontre comme pour la précédente, on obtient

$$3x - 2x = 8 + 5.$$

Comparant cette nouvelle équation à la première, on en déduit :

1° Qu'on peut rassembler dans le premier membre tous les termes renfermant l'inconnue, et repousser dans le second tous les termes connus ;

2° Qu'on peut passer un terme d'un membre dans l'autre, pourvu que, dans ce passage, on change le signe de ce terme.

Simplifiant l'équation ci-dessus, on trouve $x = 13$; l'équation est donc résolue.

Si on substitue à x ce nombre 13, les deux membres deviennent

le 1er, $3 \times 13 - 5$, ou 34;
le 2e, $2 \times 13 + 8$, ou 34.

La valeur 13 de x est donc exacte, puisqu'elle satisfait à la condition de rendre le premier membre égal au second.

Soit l'équation $7x - 8 = 4x + 7$.

Transposant les termes $7x - 4x = 7 + 8$, ou simplifiant,

$$3x = 15.$$

Si, dans ce dernier résultat, on divise les deux membres par 3, on trouve

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3},$$

ou, simplifiant, ... $x = 5$.

On déduit de là cette nouvelle règle : On débarrasse l'inconnue de son coefficient, en le passant dans le second membre comme diviseur.

Dans les exemples qui précèdent, les termes des équations n'avaient pas de dénominateurs. S'il en existait, il faudrait, avant d'appliquer les règles précédentes, préparer l'équation.

Exemple :

$$\frac{7x}{3} - \frac{6}{4} = \frac{3x}{2} + \frac{7}{5}.$$

Si l'on réduit toutes ces fractions au même dénominateur, la valeur de chaque terme restant la même, on aura fait une opération permise, qui conduit à $\frac{280x}{120} - \frac{180}{120} = \frac{180x}{120} + \frac{168}{120}$; ou, effectuant les additions et soustractions indiquées de ces nombres fractionnaires d'après les règles de l'arithmétique,

$$\frac{280x - 180}{120} = \frac{180x + 168}{120};$$

multipliant les deux membres par 120, on obtient

$$280x - 180 = 180x + 168.$$

On voit donc que, par cette opération, on a fait disparaître ou chassé les dénominateurs sans nuire à la valeur que l'inconnue doit avoir.

En comparant cette équation à celle proposée, on peut adopter cette règle : On chasse les dénominateurs dans une équation en multipliant chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres termes.

Tous les termes de l'équation pourraient ne pas avoir de dénominateur.

Exemple :

$$\frac{7x}{2} - 5 = \frac{2x}{3} + \frac{3}{4}.$$

Pour réduire tous ces termes à un même dénominateur, qu'on a ensuite le droit de supprimer, il faut multiplier chaque terme entier par le produit de tous les dénominateurs, et chaque numérateur par le produit des dénominateurs des autres termes

Opérant ainsi sur l'équation proposée, elle devient

$$84x - 120 = 16x + 18;$$
$$84x - 16x = 18 + 120;$$
$$68x = 138;$$
$$x = \frac{138}{68}.$$

On a le droit de changer les signes des deux membres d'une équation, car cela revient à les multiplier tous deux par -1.

Exemple :

$$3x - 4 = 5 - 6x.$$

Indiquant la multiplication des deux membres par -1, on a :

$(3x - 4)(-1) = (5 - 6x)(-1)$; effectuant

$-3x + 4 = -5 + 6x$, ou la première équation dans laquelle les signes de tous les termes sont changés.

On fait usage de ce principe lorsque, dans la résolution, on parvient à un premier membre précédé du signe $-$.

Exemple :

$$2x - 4 = 5x - 8;$$
$$2x - 5x = -8 + 4;$$
$-3x = -4$; changeant les signes des deux membres,
$$3x = 4;$$
$$x = \frac{4}{3}.$$

Autre exemple : $3x + 10 = 7x + 20;$

$$3x - 7x = 20 - 10;$$
$$-4x = 10;$$
$$4x = -10;$$
$$x = -\frac{10}{4}.$$

On voit que la valeur de x déduite d'une équation peut, dans certains cas, avoir le signe $-$. Elle ne doit pas alors être considérée comme nombre, mais comme quantité algébrique.

Résumé.

Pour résoudre une équation à une seule inconnue, il faut donc :

1° Chasser les dénominateurs, s'il y en a ;

2° Passer dans le premier membre tous les termes qui renferment l'inconnue, et dans le second ceux indépendants de x ;

3° Ramener, par voie de réduction, tous les termes de chaque membre à un seul ;

4° Débarrasser, dans le premier membre, l'inconnue de son coefficient.

Résolution de l'équation littérale.

Soit l'équation $ax - b = cx + d$. Transposant,

$$ax - cx = d + b;$$

réunissant en un seul les deux termes du premier membre par la convention du facteur commun,

$$x(a - c) = d + b,$$ et débarrassant x de son coefficient,

$$x = \frac{d+b}{a-c}.$$

2e Exemple : $\frac{ax}{b} - c = \frac{bx}{c} + \frac{d}{a}$, chassant les dénominateurs,

$$a^2cx - abc^2 = ab^2x + bcd,$$
$$a^2cx - ab^2x = bcd + abc^2,$$
$$x(a^2c - ab^2) = bcd + abc^2,$$
$$x = \frac{bcd + abc^2}{a^2c - ab^2}.$$

Problèmes.

Trouver un nombre dont les $\frac{2}{3}$, augmentés de 4, soient égaux aux $\frac{3}{4}$, diminués de 6.

Désignant par x le nombre cherché, on obtient de suite l'équation

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{3x}{4} - 6.$$

La résolvant, on obtient

$$8x + 48 = 9x - 72,$$
$$8x - 9x = -72 - 48;$$
$$-x = -120,$$
$$+x = +120.$$

Il est facile de vérifier que le nombre 120 répond à la question.

Diophante a passé $\frac{1}{8}$ de sa vie dans l'enfance,

$\frac{1}{6}$ dans l'adolescence,

$\frac{1}{10}$ dans le mariage avant d'avoir un fils, auquel il survécut 10 ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge de son père. A quel âge mourut Diophante?

Nommant x l'inconnue, $\frac{x}{8}$ représente le nombre d'années de son enfance,

$\frac{x}{6}$ de l'adolescence,

$\frac{x}{10}$ dans le mariage,

$\frac{x}{2}$ l'âge qu'atteignit le fils.

Ces divers éléments de sa vie, augmentés de 10 ans, doivent composer l'âge auquel il mourut.

On a donc l'équation $\frac{x}{8} + \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + \frac{x}{2} + 10 = x$;

$$120x + 160x + 96x + 480x + 9600 = 960x;$$
$$120x + 160x + 96x + 480x - 960x = -9600,$$
$$-104x = -9600;$$
$$104x = 9600;$$
$$x = \frac{9600}{104} = 92^{\text{ans.}} + \frac{32}{104}.$$

On prend avec un ouvrier l'engagement suivant :

Par chaque jour de travail il recevra 6f.

Par chaque jour d'oisiveté on lui retiendra 2f.

Au bout de 30 jours on lui doit 150f. Combien a-t-il eu de jours de travail et de jours d'oisiveté? Nommant x le nombre des jours

de travail, $30 - x$ désignera, d'après l'énoncé de la question, le nombre de jours d'oisiveté, et l'on aura l'équation

$$6x - 2(30 - x) = 150; \text{ d'où } 6x - 60 + 2x = 150;$$
$$8x = 210, x = \frac{210}{8} = 26^j \frac{3}{4}.$$

Le nombre de jours d'oisiveté est donc $3 + \frac{1}{4}$.

Résolution d'une équation à deux inconnues.

Soit l'équation $2x + 3y - 4 = 5x - 2y + 6$.

Elle est dite à deux inconnues, et peut toujours se ramener, par voie de simplification, à n'avoir que trois termes.

Car en passant dans le premier membre tous les termes renfermant les inconnues, et repoussant dans le deuxième membre les quantités connues, on obtient $2x - 5x + 3y + 2y = 6 + 4$, ou, simplifiant, $-3x + 5y = 10$.

Résoudre une équation à deux inconnues, c'est trouver les valeurs qu'il faut leur attribuer pour que le premier membre devienne égal au second.

Soit donc à résoudre l'équation $2x + 3y = 10$.

Si on attribue à x une valeur arbitraire, 1 par exemple, elle devient $2 + 3y = 10$; donc $y = \frac{8}{3}$.

Supposant à x la valeur 2, l'équation devient

$$4 + 3y = 10; \text{ d'où } y = \frac{6}{3} = 2.$$

$x = 2$, $y = 2$ forment donc une nouvelle solution.

On voit qu'en continuant ainsi, on trouvera un nombre illimité de solutions. C'est ce qui fait donner à l'équation à deux variables le nom d'indéterminée.

L'exemple précédent fait voir que, bien que le nombre des solutions soit indéfini, cependant on ne peut pas, pour en composer une, attribuer à x et y simultanément des valeurs arbitraires, puisque la valeur que prend y dépend de celle donnée à x.

On aurait pu également donner à y la valeur arbitraire, et en déduire celle correspondante de x.

On dit en conséquence qu'un problème est indéterminé, lorsqu'il conduit à une seule équation ayant deux inconnues.

Premier problème.

Trouver deux nombres, tels que le double du premier, augmenté du triple du deuxième, composent le nombre 12.

En désignant par x et y les deux nombres cherchés, on obtient l'équation

$$2x + 3y = 12.$$

Attribuant à x la valeur 1, on trouve $y = \frac{10}{3}$; c'est une des solutions de la question.

Deuxième problème.

Avec des pièces de 2ᶠ et de 5ᶠ payer 80ᶠ.

Désignant par x et y les nombres de pièces de 2ᶠ et de 5ᶠ, on obtient l'équation

$$2x + 5y = 80.$$

La valeur 1 donnée à x conduit à $y = \frac{78}{5}$, solution qui ne saurait convenir à la question, sa nature exigeant que x et y soient des nombres entiers.

$x = 2$ donne $y = \frac{76}{5}$, solution encore inutilisable.

$x = 3 \ldots\ldots y = \frac{74}{5}$

$x = 4 \ldots\ldots y = \frac{72}{5}$

$x = 5 \ldots\ldots y = \frac{70}{5} = 14$

$x = 6 \ldots\ldots y = \frac{68}{5}$

$x = 7 \ldots\ldots y = \frac{66}{5}$

$x = 8 \ldots\ldots y = \frac{64}{5}$

$x = 9 \ldots\ldots y = \frac{62}{5}$

$x = 10 \ldots\ldots y = \frac{60}{5} = 12.$

En continuant ainsi, on trouverait pour solutions nouvelles :

$x = 15,\ y = 10$. $x = 20,\ y = 8$. $x = 25,\ y = 6$.

$x = 30,\ y = 4$. $x = 35,\ y = 2$.

On voit donc qu'il existe sept manières de répondre à la question.

Si le nombre des solutions est limité, quoique l'équation renferme deux inconnues, cela tient à ce qu'il y a une des conditions de la question que l'équation n'exprime pas : c'est celle de x et y entiers.

Mais si l'on regarde l'équation $2x + 5y = 80$ comme la traduction de cet autre problème : Trouver deux nombres ou quantités tels, que le double du premier, augmenté du quintuple du second, produisent 80, alors le problème admettra un nombre illimité de solutions.

Si l'on avait à résoudre une équation à trois inconnues, telle que

$$2x + 3y + 4z = 10,$$

on attribuerait à deux des inconnues des valeurs arbitraires, et on en déduirait la valeur de la troisième.

Élimination.

Il existe des problèmes qui donnent naissance à deux équations renfermant deux inconnues, telles que

$$2x + 3y = 8,$$
$$8x - 5y = 4.$$

Elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, mais forment un système.

Les résoudre, c'est trouver des valeurs des deux inconnues qui conviennent autant à l'une qu'à l'autre de ces équations.

On remarquera, pour parvenir à une méthode de résolution, que comme rien ne dit que ces deux équations sont liées l'une à l'autre, il faut exprimer cette condition par une combinaison algébrique.

Or, si de la première on déduit la valeur de x comme si y était connu, on trouve $x = \frac{8 - 3y}{2}$. La substituant dans la seconde, on exprimera par là qu'on veut que l'x des deux équations soit le même; on obtient ainsi

$8\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) - 5y = 4$, ou, chassant le dénominateur et simplifiant

$$64 - 24y - 10y = 8. \quad -34y = -56;\ \text{d'où}\ y = \frac{56}{34}.$$

En simplifiant ou réunissant les deux termes $-24y$ et $-10y$, qui renferment, l'un l'y de la première équation, l'autre l'y de la seconde, on a bien exprimé les deux conditions imposées, que les x et les y devaient porter la même valeur dans les deux ; on est arrivé à une équation nouvelle, dans laquelle on remarque l'absence de x que l'on dit s'être éliminée.

L'équation résultante, ne renfermant qu'une inconnue, a fourni une valeur déterminée de y.

En exécutant l'opération précédente par rapport à y, on parvient à l'équation $34x = 52$, indépendante de l'inconnue y, qui est éliminée.

On a donc $x = \frac{56}{34}$, $x = \frac{52}{34}$.

Telle est la solution unique commune aux deux équations.

Il serait facile de vérifier qu'elle leur convient, car, en substituant, ces équations deviennent

$$\frac{104}{34} + \frac{168}{34} = 8, \text{ égalité exacte.}$$

$$\frac{416}{34} - \frac{280}{34} = 4, \qquad \text{id.}$$

L'élimination, qui n'a été ici qu'un résultat fortuit ou non prévu, peut être prise pour but, et l'on dit qu'on élimine une variable entre deux équations à deux inconnues, ce qui veut dire qu'on en déduit par voie de combinaison une nouvelle équation ne renfermant qu'une de ces deux inconnues.

La méthode suivie précédemment a reçu le nom d'élimination par voie de substitution, parce qu'on a en effet substitué à x, dans la deuxième équation, sa valeur déduite de la première.

Cette méthode d'élimination n'est pas la seule ; car si on reprend les équations précédentes,

$$2x + 3y = 8,$$
$$8x - 5y = 4,$$

en multipliant par 8 tous les termes de la première, et par 2 ceux de la seconde, elles deviennent

$$16x + 24y = 64,$$
$$16x - 10y = 8;$$

et comme par cette préparation le coefficient de x est rendu le

même dans les deux, on voit qu'en les retranchant membre à membre, on exprime par là que les deux x ont la même valeur et les deux y aussi, dès qu'on opère la destruction des termes en x et la réunion de ceux en y, ce qui donne $34y = 56$, la même équation que celle trouvée précédemment.

En opérant d'une manière analogue pour y, on l'éliminerait.

Cette méthode, connue sous le nom de méthode par réduction, consiste donc dans les opérations suivantes :

1° Multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient d'une des deux inconnues dans la seconde, et réciproquement.

2° Ajouter ou retrancher les deux équations membre à membre, suivant que les termes qui ont actuellement le même coefficient ont des signes contraires ou le même signe.

Ainsi la première préparation ayant donné

$$16x + 24y = 64,$$
$$16x - 10y = 8,$$

on a dû les retrancher membre à membre, pour faire disparaître le terme en x.

La seconde préparation fournit les équations transformées

$$10x + 15y = 40,$$
$$24x - 15y = 12.$$

Il faut ici les ajouter pour que les termes en y se détruisent ou disparaissent. Les deux méthodes d'élimination analysées précédemment ne sont pas les seules, mais suffisent dans tous les cas, et il n'y a pas de préférence à donner à l'une des deux. Il faut dans chaque cas faire usage de celle qui conduira le plus promptement au résultat, ce qui dépendra de la forme des équations proposées (*). Soit le système

$$x = 5y - 6,$$
$$2x + 3y = 4.$$

L'élimination par substitution sera préférable. Pour les équations

$$4x + 2y = 7,$$
$$3x - 4y = 4,$$

(*) Quelquefois la préparation des deux équations peut se simplifier. Ce cas se présente lorsque les coefficients qu'on veut rendre égaux ont déjà un facteur commun. Ainsi, dans les équations précédentes, il suffisait de multiplier les deux termes de la première par 4, et de n'apporter à la seconde aucune modification.

la méthode par réduction conduira plus promptement à l'élimination.

On s'aperçoit dans l'exemple précédent que les deux inconnues ont le même dénominateur. Ce n'est point un résultat accidentel, mais bien une nécessité, ainsi qu'on l'établira bientôt.

En suivant des procédés analogues, on arrive à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

Exemple :
$$(1)\quad 2x + 3y + 4z = 10,$$
$$(2)\quad 3x + 4y - 5z = 8,$$
$$(3)\quad 4x - 2y - 3z = 4.$$

Multipliant par 3 tous les termes de l'équation (1), et par 2 ceux de l'équation (2), elles deviennent
$$6x + 9y + 12z = 30,$$
$$6x + 8y - 10z = 16;$$
en les retranchant membre à membre, on obtient
$$(4)\quad y + 22z = 14.$$

Combinant actuellement, par le même procédé, les équations (2) et (3), on trouve
$$\left.\begin{array}{r} 12x + 16y - 20z = 32 \\ 12x - \ \ 6y - \ \ 9z = 12 \end{array}\right\} \text{ retranchant membre à membre,}$$
$$(5)\quad 22y - 11z = 20$$

Les équations (4) et (5) rapprochées l'une de l'autre fournissent le système
$$y + 22z = 14,$$
$$22y - 11z = 20,$$
de deux équations à deux inconnues, déduites des trois proposées. En les traitant à leur tour comme précédemment, elles deviennent
$$\left.\begin{array}{r} 22y + 484z = 308 \\ 22y - \ \ 11z = \ \ 20 \end{array}\right\} \text{ retranchant membre à membre,}$$
$$495z = 288; \text{ d'ou enfin } z = \frac{288}{495}.$$

Actuellement que z est trouvé, pour avoir les valeurs des deux autres inconnues, il est préférable, au lieu de recommencer des calculs analogues pour chacune d'elles, de substituer cette valeur de z dans une des équations (1) ou (5), dans (4) par exemple; on obtient

alors $y + \frac{22 \times 288}{495} = 14$; d'où, chassant le dénominateur et effectuant,

$$495y + 6336 = 8930; \text{ d'où}$$
$$y = \frac{2594}{495}.$$

Substituant dans une des premières à y et z leurs valeurs numériques trouvées, on obtiendrait x.

On voit donc que l'esprit de la méthode consiste à déduire des trois équations à trois inconnues, deux équations à deux inconnues, et enfin, de ces deux dernières, une équation à une seule inconnue, dont alors on obtient la valeur.

Substituée dans une des équations à deux inconnues, elle fournit la valeur de la seconde.

Les valeurs des deux déterminées, substituées dans une des trois premières équations, fournissent la valeur de la troisième inconnue.

Il ne faudrait pas de ce qui précède conclure qu'on peut toujours résoudre trois équations à trois inconnues, c'est-à-dire trouver une valeur fixe pour chacune des quantités x, y, z.

Discussion. Il pourrait arriver que deux des équations proposées exprimassent la même condition, et par suite ne comptassent que pour une seule. Il n'y aurait alors dans le problème que deux équations à trois inconnues, et le système serait indéterminé; car éliminant une des inconnues, on parviendrait à une équation unique en renfermant deux.

Si deux équations du système étaient incompatibles, les équations à trois inconnues, quoique au nombre de trois, n'auraient pas de solution commune.

Exemples d'indétermination.

$$x + y + z = 5,$$
$$2x + 2y + 2z = 10,$$
$$3x + 3y - 4z = 2.$$

Les deux premières équations, après la préparation, deviennent identiques, et le système se réduit à celui-ci :

$$x + y + z = 5,$$
$$3x + 3y - 4z = 2.$$

En attribuant à l'une des inconnues, z par exemple, une valeur arbitraire, elles tombent à l'état des deux équations à deux inconnues. Or, puisqu'on a pu et dû attribuer à l'une d'elles une valeur arbitraire, le système est bien indéterminé.

Exemples d'impossibilité.

$$x + y + z = 5,$$
$$2x + 2y + 2z = 7,$$
$$3x + 3y + 4z = 2.$$

En préparant les deux premières, elles deviennent

$$2x + 2y + 2z = 10,$$
$$2x + 2y + 2z = 7;$$

équations incompatibles, ou auxquelles les mêmes valeurs de x, y, z ne sauraient convenir.

Autre exemple :

Soit le système
$$(1)\quad x + 2y - z = 6,$$
$$(2)\quad 2x - y - 2z = 4,$$
$$(3)\quad x - 3y - z = 8.$$

En retranchant (1) de (3) sans les préparer, puisque le coefficient de x est le même, on obtient $5y = -2$. Deux inconnues se sont éliminées par accident.

En effectuant sur la deuxième et la troisième, on en déduit $5y = -12$. Résultat incompatible avec le précédent.

Comme on ne peut pas toujours apercevoir, à la simple inspection des équations, que deux d'entre elles sont la conséquence l'une de l'autre, l'algèbre prévient de l'existence de ce fait, en fournissant l'expression $0 = 0$ comme résultat de la combinaison de deux des équations du système.

Si, parmi les trois équations proposées, deux d'entre elles étaient incompatibles, l'algèbre en préviendrait en fournissant l'expression $0 =$ un nombre quelconque comme résultat de l'élimination, ou bien deux valeurs essentiellement différentes de la même inconnue, ainsi qu'il est arrivé dans le dernier exemple numérique.

ÉQUATIONS LITTÉRALES.

Soit à résoudre les deux équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

En les préparant comme il a été expliqué précédemment, elles deviennent

$$a'ax + a'by = a'c,$$
$$aa'x + ab'y = ac';$$

retranchant membre à membre,

$$a'by - ab'y = a'c - ac';$$

mettant y en facteur commun,

$$y\,(a'b - ab') = a'c - ac'; \quad \text{d'où } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Opérant de la même manière pour x, on trouve $x = \dfrac{c'b - cb'}{a'b - ab'}$.

Ces valeurs des inconnues sont composées d'une manière remarquable avec les quantités connues des équations.

On voit que les valeurs des deux inconnues se présentent avec le même dénominateur, indépendamment de toute valeur numérique particulière attribuée aux coefficients des inconnues et au terme tout connu.

Si quelquefois cependant, dans la résolution d'équations numériques, les valeurs des inconnues ne portent pas le même dénominateur, cela tient uniquement aux simplifications qu'ont pu subir leurs valeurs.

En appliquant aux mêmes équations la méthode d'élimination par substitution, on obtient $x = \dfrac{c - by}{a}$, tirée de la première;

$$a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c', \text{ résultat}$$

de la substitution de cette valeur de x dans la deuxième équation : $a'c - a'by + ab'y = ac'$, obtenue en chassant dans la précédente le dénominateur, et effectuant ; $y\,(ab' - a'b) = ac' - a'c$; d'où $y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$.

Cette valeur est la même que celle trouvée par la première méthode, aux signes près du numérateur et du dénominateur; et l'on sait que le changement de signe des deux termes d'une fraction n'influe pas sur sa valeur.

Vérification. En substituant dans les équations proposées à x et y leurs valeurs, on trouve

$$a\left(\frac{c'b - cb'}{a'b - ab'}\right) + b\left(\frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}\right) = c,$$

$$a'\left(\frac{c'b - cb'}{a'b - ab'}\right) + b'\left(\frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}\right) = c'.$$

Chassant les dénominateurs et effectuant les multiplications indiquées, ces expressions devlennent

$$ac'b - acb' + ba'c - bac' = a'bc - ab'c,$$
$$a'c'b - a'cb' + a'b'c - b'ac' = a'bc' - ab'c'.$$

Dans le premier membre de la première, les deux termes bac' se détruisent.

Dans le premier membre de la deuxième, les deux termes $a'cb'$ se détruisent, et elles se réduisent aux deux identités

$$\left.\begin{array}{l} -acb' + ba'c = a'bc - ab'c \\ a'c'b - b'ac' = a'bc' - ab'c' \end{array}\right\}$$ qu'il est plus commode d'écrire dans l'ordre alphabétique, en mettant en tête de chaque terme les lettres sans accent.

$$\left.\begin{array}{l} -acb' + bca' = bca' - acb' \\ ba'c' - ab'c' = ba'c' - ab'c' \end{array}\right\}$$ identités.

Résolution de trois équations littérales à trois inconnues.

Soient les trois équations

$$ax + by + cz = d, \quad (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = d', \quad (2)$$
$$a''x + b''y + c''z = d''. \quad (3)$$

Préparant ces trois équations, elles fournissent les deux groupes

$$a'ax + a'by + a'cz = a'd, \quad a''a'x + a''b'y + a''c'z = a''d',$$
$$aa'x + ab'y + ac'z = ad'; \quad a'a''x + a'b''y + a'c''z = a'd''.$$

Retranchant dans chaque groupe membre à membre, simplifiant, et mettant y et z en facteurs communs,

$$y(a'b - ab') + z(a'c - ac') = a'd - ad',$$
$$y(a''b' - a'b'') + z(a''c' - a'c'') = a''d' - a'd'';$$

système nouveau de deux équations à deux inconnues.

Le préparant pour éliminer y, il devient

$$y(a'b - ab')(a''b' - a'b'') + z(a'c - ac')(a''b' - a'b'') = (a'd - ad') \times (a''b' - a'b''),$$
$$y(a''b' - a'b'')(a'b - ab') + z(a''c' - a'c'')(a'b - ab') = (a''d' - a'd'') \times (a'b - ab');$$

retranchant membre à membre,

$$z(a'c - ac')(a''b' - a'b'') - z(a''c' - a'c'')(a'b - ab') = (a'd - ad') \times (a''b' - a'b'') - (a''d' - a'd'')(a'b - ab').$$

En effectuant les multiplications et soustractions indiquées, et rangeant les lettres dans chaque terme par ordre alphabétique et par nombre d'accents,

$$ca'b'a''z - ab'c'a''z - ca'^2b''z + aa'c'b''z - ba'c'a''z + ba'^2c''z + ab'c'a''z - aa'b'c''z = da'b'a'' - ab'd'a'' - da'^2b'' + aa'd'b'' - ba'd'a'' + ba'^2d'' + ab'd'a'' - aa'b'd''.$$

Le second et le cinquième terme du premier membre se détruisent.

Le second et le cinquième terme du deuxième membre se détruisent également.

Après ces suppressions, a est facteur commun à tous les termes, et par suite peut se supprimer.

Mettant enfin z en facteur commun, on obtient

$$z = \frac{db'a'' - da'b'' + ad'b'' - bd'a'' + ba'd'' - ab'd''}{cb'a'' - ca'b'' + ac'b'' - bc'a'' + ba'c'' - ab'c''}.$$

Cette valeur de z est remarquable par la composition de chacun de ses termes, et par la relation qui existe entre ceux du numérateur et leurs correspondants du dénominateur. On obtiendrait ces premiers en substituant d à c dans chaque terme du dénominateur.

En cherchant par un procédé analogue les valeurs de x et y, elles se présenteront sous la même forme que la valeur de z, et auront le même dénominateur qu'elle.

Lorsque deux équations littérales sont une déduction l'une de l'autre, c'est par une valeur de x de la forme $\frac{0}{0}$ que l'algèbre annonce l'indétermination de leur système.

Lorsque les équations sont incompatibles, l'algèbre l'accuse par une valeur de la forme $x = \frac{n}{0}$, expression à laquelle on a donné le nom de symbole de l'infini, par suite de cette considération qu'une expression fractionnaire est d'autant plus grande que le dénominateur est plus petit. On a inventé le signe ∞ pour exprimer l'infini.

Il résulte de tout ce qui précède : 1° qu'un problème doit toujours, pour être déterminé, renfermer dans son énoncé autant de conditions distinctes que d'inconnues ;

2° Qu'il peut cependant, dans ce cas, être impossible, si certaines de ces conditions sont incompatibles ;

Qu'on ne peut éliminer, dans un système de trois équations à trois inconnues, que deux de ces inconnues;

Qu'on peut enfin séparer ces inconnues les unes des autres, et remplacer le système des trois équations renfermant chacune les trois inconnues, par un système équivalent de trois équations ne renfermant chacune qu'une des inconnues.

Ce serait une erreur de croire qu'un système de deux équations à deux inconnues peut remplacer un système de trois équations à trois inconnues. Il peut tenir la place de deux de ces équations; mais non des trois.

Problème des courriers.

Deux courriers partent à la même heure de deux points A et B, distants entre eux de d lieues. Ils vont dans la même direction AR. La vitesse du courrier A, ou le nombre de lieues qu'il parcourt dans une heure, est représentée par v; celle du second par v'. On demande le chemin parcouru par chacun d'eux, et le temps de marche jusqu'au point où la rencontre aura lieu.

Soit R le point de rencontre; désignons par x le chemin Ax, celui BR par y, et on aura la première équation $x = d + y$.

Pour accomplir le nombre x de lieues, le premier mettra un

temps représenté par $\frac{x}{v}$, le second par $\frac{y}{v'}$; d'où la nouvelle équation $\frac{x}{v}=\frac{y}{v'}$, puisque les expressions des temps de marche doivent être égales.

Or, du système des équations $x=y+d$,

$$\frac{x}{v}=\frac{y}{v'},$$

on déduit, d'après les principes démontrés précédemment,

$$x=y+d,$$
$$v'x=vy;$$

d'où $v'y+v'd=vy$, et enfin $y=\frac{v'd}{v-v'}$, $x=\frac{vd}{v-v'}$.

Si on admet l'hypothèse $v=v'$, les valeurs de x et de y deviennent de la forme $x=\frac{vd}{0}$, $y=\frac{v'd}{0}$, ou l'infini. Le problème était bien impossible, puisque l'hypothèse $v=v'$ oblige les deux courriers à toujours se maintenir à même distance l'un de l'autre, quel que soit le temps de marche; les équations se réduisent à $x=y+d$,
$x=y$,
incompatibles.

L'hypothèse $v=v'$, $d=0$ réduit les valeurs de x et y à la forme $\frac{0}{0}$, symbole d'indétermination; ce qui devait être, puisque les deux courriers, possédant des vitesses égales, et partant du même point, se rencontrent à toute distance de A. Les équations deviennent
$x=y$,
$x=y$, c'est-à-dire, n'en forment qu'une.

Si les courriers devaient marcher à la rencontre l'un de l'autre, on trouverait les équations $x+y=d$, $\frac{x}{v'}=\frac{y}{v'}$, et les valeurs des inconnues seraient $x=\frac{vd}{v+v'}$, $y=\frac{v'd}{v+v'}$, qui ne peuvent devenir ni infinies ni indéterminées, puisque le dénominateur, somme de deux quantités, ne peut devenir zéro sous l'influence d'aucune valeur attribuée séparément à v et v'.

Si dans le premier cas on supposait v plus petit que v', les solu-

tions $x = \frac{vd}{v - v'}$, $y = \frac{v'd}{v - v'}$ deviendraient négatives, ce qui ne voudrait pas dire que le problème est impossible, mais que les courriers marchaient dans le sens opposé à celui que l'on a supposé, et que c'est dans ce sens qu'ils se rencontraient. Et en effet, si on remettait le problème en équation en changeant le sens de marche, on trouverait $x = \frac{vd}{v' - v}$, $y = \frac{v'd}{v' - v}$, valeurs qui sont positives.

Équations du 2e degré à une inconnue.

Le degré d'une équation à une seule inconnue est déterminé par le plus grand exposant de l'inconnue qu'elle renferme, après toutefois que l'équation a été privée de tout dénominateur.

Ainsi, $ax = b$ est du premier degré,
$ax^2 + bx = c$ est du deuxième degré,
$\frac{ax}{b} + c = \frac{b}{cx} + d$ est d'un degré inconnu, à cause de la présence des dénominateurs. Mais si on les chasse, elle devient

$acx^2 + bc^2x = b^2 + bcdx$; elle est donc du deuxième degré.

Soit l'équation $\frac{ax}{b} + c = \frac{bx}{c} + d$. On peut se prononcer sur le degré, et dire qu'elle est du premier, malgré la présence des dénominateurs; parce qu'étant indépendants de x, ils ne modifieront en rien, lorsqu'on les fera disparaître, l'exposant de cette inconnue.

La résolution de l'équation du deuxième degré à une seule inconnue repose sur les deux principes suivants :

le carré de $ax + b$ est $a^2x^2 + 2abx + b^2$;
la racine carrée de a^2 est aussi bien $-a$ que $+a$.

Toutes les fois qu'on a un binôme de la forme $x^2 + bx$, on peut toujours trouver un nouveau terme indépendant de x, et tel qu'ajouté aux deux proposés, leur ensemble constitue le carré d'un binôme rationnel en x, c'est-à-dire, privé de tout radical renfermant x.

Car $x^2 + bx$ ne peut être le commencement du carré d'un binôme qu'autant que le premier terme de ce binôme est x, et que

bx représente le double de x multiplié par le second terme de ce binôme. $\frac{bx}{2x}$ ou $\frac{b}{2}$ est donc essentiellement le second terme du binôme cherché. Le troisième terme de son carré est par suite $\frac{b^2}{4}$; et par conséquent on dit que $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$ est le carré complété ayant pour racine le binôme $x + \frac{b}{2}$.

On voit donc que le carré se complète par le carré de la moitié du coefficient du terme en x.

Mais on n'avait pas supposé de coefficient à x^2, et par suite il ne faudrait pas étendre la règle que l'on vient de découvrir au binôme $ax^2 + bx$. Exemples numériques :

Compléter le carré qui commence

par $x^2 + 6x$; réponse : $x^2 + 6x + 9$;

$x^2 + 7x$;..... $x^2 + 7x + \frac{49}{4}$;

$x^2 - 8x$;..... $x^2 - 8x + 16$.

Soit à résoudre l'équation $x^2 + 4x = 5$.

Il faut trouver la valeur de x au premier degré. Pour faire disparaître l'exposant de x, on doit donc extraire la racine du premier membre, et par suite du second.

Mais cette opération, qui doit conduire à dégager x, ne peut s'exécuter immédiatement, puisque le premier membre n'est point un carré. Ramenons-le donc à cet état en ajoutant aux deux membres le terme 4, qui complète le carré dans le premier membre. On obtient alors $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$, simplifiant et extrayant les racines des deux membres, $x + 2 = \pm 3$, équation de laquelle on déduit $x = -2 \pm 3$,

ce qui fournit les deux valeurs distinctes, $x = 1$, $x = -5$. Elles conviennent également toutes deux ; car, substituées dans l'équation, elles la ramènent à une identité.

L'équation du second degré est donc remarquable par la présence des deux valeurs de son inconnue.

L'équation $x^2 - 5x = -6$ conduit à

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}.$$

Donc $$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2};$$

et enfin, $$x = +\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, \text{ ou } x = 3, x = 2.$$

Elles conviennent toutes deux également à l'équation proposée.

L'équation précédemment résolue ne renfermait que trois termes, forme à laquelle, par une préparation, toute équation peut se ramener.

Soit en effet l'équation :

$$\frac{3x^2}{4} - 5x - 2 = \frac{7x^2}{5} + 8x + \frac{1}{3}.$$

Chassant les dénominateurs, elle devient :

$$45x^2 - 300x - 120 = 84x^2 + 480x + 20;$$

transposant et simplifiant :

$$-39x^2 - 780x = 140;$$

changeant les signes des deux membres :

$$39x^2 + 780x = -140.$$

Si l'on veut la ramener complétement à la forme de celle résolue précédemment, il faut diviser les deux membres par le coefficient 39 de x^2. Elle devient alors :

$$x^2 + \frac{780}{39}\,x = -\frac{140}{39}.$$

On demande à l'algèbre une formule servant à composer les valeurs de x d'une équation du second degré ramenée à la forme précédente, sans être obligé d'effectuer les opérations faites sur celle déjà traitée.

Si on prend l'équation littérale $x^2 + px = q$ de la forme citée, on trouve en complétant le carré dans le premier membre :

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4},$$

d'où $$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4};$$

et en extrayant les racines des deux membres :

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

donc enfin,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Comparant ces valeurs de x à l'équation dont elles sont déduites, on reconnaît que dans toute équation du second degré ramenée à trois termes, le coefficient de x^2 étant l'unité, la valeur de x est égale à la moitié en signe contraire du coefficient du terme en x, plus et moins la racine carrée du carré de cette moitié, suivi du terme tout connu avec le signe qu'il a dans le second membre.

APPLICATIONS.

$$x^2 + 6x = -8;$$
$$x = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1.$$
$$3x^2 + 5x = 7;$$
$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{7}{3};$$
$$x = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{7}{3}}.$$

On voit que, pour terminer ce calcul, il faudrait pouvoir exécuter l'opération indiquée par le signe radical, théorie qu'on exposera dans la seconde partie de l'arithmétique.

Discussion de l'équation du second degré.

Soit l'équation $x^2 - 8x = -15$.

En lui appliquant la règle générale, on trouve

$$x = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1.$$

Les deux valeurs de x sont donc 5 et 3.

On aperçoit que la somme 8 de ces deux valeurs, et leur produit 15, sont les nombres connus de l'équation proposée en signe contraire.

Ce n'est point un fait accidentel, car si on prend l'équation générale

$$x^2 + px = q,$$

on en déduit pour x les deux valeurs $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$,

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

valeurs dont la somme est égale à $-\frac{2p}{2}$ ou $-p$.

La multiplication de ces valeurs fournit les deux produits partiels

$$+\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

$$+\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \left(\frac{p^2}{4} + q\right);$$

les deux termes radicaux se détruisant, on trouve

$$+\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - q, \text{ ou finalement } -q.$$

Il est donc constaté que, dans une équation du second degré ramenée à la forme $x^2 + px = q$, le coefficient p, pris en signe contraire, représente la somme des valeurs de x, et le terme tout connu q, en signe contraire, leur produit.

Soit l'équation $x^2 - 8x = -17$; on en déduit

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 17} = 4 \pm \sqrt{-1}.$$

C'est ce qu'on nomme une valeur imaginaire, parce que la racine -1 ne peut se concevoir à cause du signe moins. On nomme donc imaginaire toute valeur composée d'une quantité négative enfermée sous un radical.

Quelquefois l'équation du second degré, $x^2 + px = q$, se met sous la forme $x^2 + px - q = 0$, ce qui ne la modifie en rien.

L'équation du deuxième degré peut être incomplète, c'est-à-dire, avoir moins de trois termes. Il n'y a pas besoin alors pour la résoudre de recourir à la formule, il est plus simple d'opérer directement.

Ainsi, l'équation $x^2 + 6x = 0$ donne $x(x + 6) = 0$. Mais un produit de deux facteurs ne peut devenir zéro, qu'autant qu'un des facteurs devient nul.

On a donc $x = 0$, et $x + 6 = 0$; d'où $x = -6$.

Lorsqu'on connaît d'avance les deux valeurs que x doit avoir dans une équation, il est facile de la former. Soient $x = 2, x = 7$, les valeurs qu'on veut attribuer à x. Alors $7 + 2$ en signe contraire, ou -9, doit former le coefficient de x, et 7×2 en signe contraire, ou -14 le terme tout connu. L'équation sera donc $x^2 - 9x = -14$.

Soit proposé ce problème : Trouver deux nombres dont la somme soit 7 et le produit 10.

Il suffira d'écrire de suite l'équation $x^2 - 7x = -10$. Les deux valeurs de x de cette équation répondront à la question.

Équation bicarrée.

On nomme équation bicarrée une équation à trois termes,
Le 1er renfermant x à la 4e puissance ;
Le 2e id. à la 2e puissance ;
Le 3e indépendant de x.

Telle est l'équation $x^4 + ax^2 = b$. Pour la résoudre, on poser $x^2 = y$, et, substituant, elle devient $y^2 + ay = b$, d'où

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Remettant pour y sa valeur x^2, et extrayant la racine carrée des deux membres, on obtient

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}}.$$

Résolution de deux équations du deuxième degré à deux inconnues.

Les méthodes d'élimination vues précédemment ne sauraient s'appliquer à deux équations complètes du deuxième degré à deux inconnues, mais bien à deux équations incomplètes, telles que

$$x^2 + y^2 = a,$$
$$xy = b.$$

Pour éliminer y, on tirera de la deuxième $y = \frac{b}{x}$.

Substituant dans la première équation, elle devient

$$x^2 + \frac{b^2}{x^2} = a, \text{ ou chassant le dénominateur,}$$

$x^4 + b^2 = ax^2$, ou $x^4 - ax^2 = -b^2$, équation bicarrée qu'on traitera comme il a été dit précédemment.

On pouvait résoudre les mêmes équations par un tout autre procédé.

En doublant les deux membres de la seconde, et l'ajoutant et retranchant successivement à la première, on obtient les deux nouvelles équations

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b, \quad (x+y)^2 = a + 2b;$$

ou

$$x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b \quad (x-y)^2 = a - 2b.$$

Extrayant les racines carrées des deux membres,

$$x + y = \pm\sqrt{a+2b},$$
$$x - y = \pm\sqrt{a-2b}.$$

Équations du premier degré, qui, ajoutées et retranchées, donnent

$$2x = \pm\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b},$$
$$2y = \pm\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b};$$

et enfin

$$x = \frac{\pm\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{2},$$
$$y = \frac{\pm\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}{2}.$$

Lorsque a et b sont des nombres, ces valeurs peuvent subir des simplifications notables.

Ainsi, $x = \dfrac{\pm\sqrt{10+6} \pm \sqrt{10-6}}{2}$ se réduit à

$$x = \pm\frac{\sqrt{16} \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{\pm 4 \pm 2}{2}.$$

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES.

Lorsqu'on veut découvrir les propriétés de certains nombres, et les relations qu'ils peuvent avoir entre eux, il est nécessaire de pénétrer dans les éléments de leur constitution.

On sait que tout nombre peut être considéré comme étant la somme de plusieurs autres. Il faut examiner s'il ne serait pas aussi le produit de facteurs de différentes natures.

La division a déjà pour but une décomposition de cette espèce.

1er *principe.* Si un nombre a en divise exactement plusieurs autres b, c, d, il divise leur somme.

En effet, $\frac{b}{a}$ $\frac{c}{a}$ $\frac{d}{a}$ étant des nombres entiers par hypothèse, leur somme $\frac{b+c+d}{a}$ doit l'être, ce qui exige que a divise exactement $b+c+d$.

Il en résulte que si le nombre a divise celui b, il doit diviser les multiples, car m fois $b = b+b+b+b$, etc.; et, d'après le principe précédent, tout nombre qui divise b divise le deuxième membre, et par suite le premier.

On voit également que tout nombre qui en divise deux autres divise leur différence.

Un nombre entier qui n'est divisible par aucun autre se nomme premier absolu; ainsi, les nombres 2, 3, 5, 7, 11, sont premiers absolus.

Tout nombre divisible exactement par 2 se nomme nombre pair, et par suite les chiffres 2, 4, 6, 8, sont des chiffres pairs.

Le nombre 10 est le produit des facteurs 2 et 5. Donc 100, produit de 10 par 10, est le produit de deux groupes tels que 2×5,

c'est-à-dire, $2^3 \times 5^3$. De même, $1000 = 2^3 \times 5^3$. Toute puissance de 10 est donc le produit des facteurs premiers 2 et 5, affectés chacun du même exposant que la puissance de 10.

Toute puissance de 10 renfermant les facteurs 2 et 5 est divisible exactement par chacun de ces deux nombres

DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

Pour savoir si un nombre est divisible par un autre, il suffit de faire la division, et de voir si elle s'accomplit sans reste.

Mais il existe des caractères auxquels on reconnaît si un nombre est divisible par certains autres, tels que 2, 3, 5, etc.

Pour trouver ces caractères, il faut chercher à décomposer le nombre en deux autres, dont l'un soit forcément, par sa nature, divisible exactement par le diviseur essayé, et dont l'autre, facile à former, soit le seul sur lequel l'essai doive porter.

Soit le nombre 7564; il se décompose en 7 mille, plus 5 centaines, plus 6 dizaines, plus 4 unités. Une dizaine est divisible par 2; donc ses multiples 6 dizaines, 5 centaines, 7 mille, le sont aussi, quels que soient ces chiffres; il n'y a donc que le chiffre des unités qui puisse porter obstacle à la division exacte du nombre par 2. Il faut donc, pour qu'un nombre soit divisible par 2, qu'il se termine par un chiffre pair.

Le même raisonnement appliqué au diviseur 5 fait reconnaître qu'un nombre, pour être divisible par 5, doit se terminer par ce chiffre. Une centaine étant le produit des facteurs 25 et 4, est divisible par 4; il en est donc de même des mille, dizaines de mille, etc. Il faut donc et il suffit que le nombre formé par les deux derniers chiffres soit divisible exactement par 4, pour que le nombre entier le soit.

Tout nombre formé de chiffres 9, tels que 999 par exemple, est exactement divisible par 3, chacune de ses parties l'étant. Mais ce nombre est une puissance de 10 diminuée de l'unité; on peut donc dire que toute puissance de 10 est un certain multiple de 3, augmenté d'une unité.

Soit donc le nombre 57854, qui peut se résoudre en

50000
7000
800
50
4.

Puisque 10 = multiple de 3, plus l'unité, on aura
50 = 5 + multiple de 3,
800 = 8 + multiple de 3,
7000 = 7 + multiple de 3,
50000 = 5 + multiple de 3;

donc 57854 = un multiple de 3 augmenté de $5+7+8+5+4$, ou de la somme des chiffres significatifs du nombre proposé.

Il faut donc et il suffit que cette seconde partie, facile à déduire du nombre proposé, soit divisible par 3, pour que le nombre entier le soit. Dans l'exemple ci-dessus, l'essai doit donc porter uniquement sur le nombre 29.

Le reste de la division d'un nombre par 3 s'obtient donc en prenant le reste de la division par 3 de la somme de ses chiffres significatifs. On parvient, pour le nombre 9, au même résultat, à l'aide du même raisonnement.

Les caractères de divisibilité qui précèdent s'appliquent à la simplification des fractions.

Puisqu'on peut, sans altérer la valeur d'une fraction, diviser ses deux termes par le même nombre, il en résulte que si les deux termes sont divisibles par un des nombres 2, 3, 4, 5, 9, 10, ce qui est facile à reconnaître par les caractères précédents, on pourra procéder à la simplification.

Ainsi, $\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, les termes ayant été divisibles successivement par 2;

$\frac{27}{42} = \frac{9}{14}$, les deux termes étaient divisibles par 3;

$\frac{104}{432} = \frac{57}{216} = \frac{19}{72}$, les deux termes de la 1re étaient divisibles par 2, et ceux de la 2e par 3.

Si aucun des diviseurs dont il a été parlé précédemment ne réussissait, il n'en faudrait pas conclure que la fraction ne pouvait se simplifier, mais seulement que cette méthode est insuffisante.

L'expression fractionnaire reviendra à des termes d'autant moindres, que le diviseur utilisé sera plus grand. Il y a donc intérêt à chercher le plus grand nombre pouvant diviser exactement deux nombres donnés : c'est ce qu'on nomme leur plus grand diviseur commun.

Théorie du plus grand diviseur commun à deux nombres.

Supposons les nombres 52 et 19.

Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ne peut surpasser 19 qu'il doit diviser, et 19 serait le nombre cherché, s'il divisait 52 ; on est donc conduit à essayer la division de 52 par 19 ; on trouve 2 pour quotient, et 14 pour reste. Par suite, on a l'égalité

$$52 = 19 \times 2 + 14.$$

Le nombre cherché devant diviser 52 et 19, devra diviser le multiple 19×2 de ce dernier nombre ; il devra donc diviser 14, reste de leur division.

Puisqu'il doit diviser 19 et 14 à la fois, il ne peut surpasser le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

En second lieu, le plus grand diviseur commun aux deux nombres 14 et 19 devra diviser 19×2, et par suite le premier membre 52 de l'égalité ; il sera donc commun diviseur aux deux nombres 52 et 19, et par suite ne pourra surpasser le plus grand diviseur commun à ces deux nombres. Il résulte de ce raisonnement :

1° Que le plus grand diviseur commun aux deux nombres 52 et 19 ne peut surpasser celui entre 19 et 14 ;

2° Que le plus grand diviseur commun aux deux nombres 19 et 14 ne peut surpasser celui qui existe entre 52 et 19.

Ces deux diviseurs, qui ne peuvent mutuellement se surpasser, sont égaux.

Le plus grand diviseur commun à deux nombres est donc le même que celui qui existe entre le plus petit des deux et le reste de leur division.

La question est donc ramenée à opérer actuellement sur les nombres 19 et 14, et se trouve par là simplifiée, ces nombres étant moindres que ceux proposés.

En opérant sur ces nouveaux nombres comme sur les premiers, on trouve 1 pour quotient et 5 de reste.

Il faut opérer de nouveau sur les nombres 14 et 5. Leur division ne s'effectue pas exactement et l'unité est enfin le plus grand commun diviseur cherché.

On dispose le calcul de la manière suivante :

	2	1	2	1	4
52	19	14	5	4	1
14	5	4	1	0	

Lorsque deux nombres n'ont pas de commun diviseur, on en est prévenu par l'opération même; car on parvient pour dernier reste à l'unité, diviseur commun à tous les nombres imaginables.

Si dans le courant des calculs on parvenait à un reste, nombre premier absolu, et que l'opération suivante fournît elle-même un reste, on pourrait arrêter là l'opération, et conclure que les nombres proposés étaient premiers entre eux; nom qu'on donne à deux nombres n'ayant pas de diviseurs communs.

En cherchant le plus grand diviseur commun aux deux termes de la fraction $\frac{84}{210}$, on trouve qu'il est 42; divisant donc les deux termes par 42, la fraction devient $\frac{2}{5}$.

Tout diviseur commun à deux nombres divise leur plus grand commun diviseur.

En effet, on a déjà démontré que tout nombre qui en divisait à la fois deux autres, divisait le reste de leur division.

Or, si l'on applique ce résultat aux nombres A et B, dont on a cherché le plus grand diviseur commun, on a le tableau suivant des opérations :

	q	q'	q''
A	B	R	R'
R	R'	R''	

Tout diviseur commun à A et B divise R; divisant donc B et R, il divise R'; divisant R et R', il doit diviser R''; devant donc diviser les restes successifs, il doit diviser le plus grand diviseur commun, qui est le dernier de ces restes.

Pour trouver le plus grand diviseur commun à trois nombres, 36, 300 et 210, on cherche d'abord le plus grand diviseur 12, commun aux deux premiers 36 et 300 ; puis, le plus grand diviseur 6, commun aux deux nombres 12 et 210 : 6 sera le plus grand diviseur commun aux trois nombres proposés. En effet, le nombre cherché devant diviser 36 et 300, devra diviser leur diviseur 12; devant donc diviser 12 et 210, il ne saurait être plus grand que leur plus grand diviseur commun 6.

Si donc on prouve que 6 divise les trois nombres proposés, il sera démontré qu'il est leur plus grand diviseur commun.

Or, il divise les deux premiers, puisqu'il divise leur plus grand diviseur commun 12; il divise le troisième, puisqu'il est diviseur commun à 12 et à 210. Le principe est donc démontré.

Donc, pour trouver le plus grand diviseur commun à quatre nombres a, b, c, k, supposés rangés par ordre de grandeur, on cherche le plus grand diviseur d, commun aux deux plus petits, a, b, puis le plus grand diviseur d', commun à d et c; et enfin, le plus grand diviseur d'', commun à d' et k. d'' est le résultat demandé.

Facteurs premiers.

Deux nombres premiers absolus sont premiers entre eux, puisque n'ayant ni l'un ni l'autre de facteurs, ils ne peuvent en avoir de communs.

La réciproque est fausse, et deux nombres premiers entre eux, tels que 6 et 35, peuvent n'être premiers absolus ni l'un ni l'autre.

Lorsque de deux nombres donnés A et P, l'un, P, est premier absolu, et l'autre pas, ces nombres sont premiers entre eux, si P ne divise pas A; car P n'ayant pas de facteurs, ne peut en avoir de commun avec A.

Principe fondamental :

Tout nombre c qui divise un produit $a \times b$ de deux facteurs, s'il est premier avec a, est forcé de diviser b. En effet :

a et b étant premiers entre eux, leur plus grand diviseur commun est l'unité. On a donc la série d'opérations :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & q & q' & q'' \\ a & c & R & R' \\ R & R' & 1 & \end{array}$$

, en supposant que l'opération se termine au quotient q''.

Si on multiplie a et c par b, R le sera aussi, puisqu'en multipliant le dividende et le diviseur par un nombre, le reste est multiplié par ce nombre.

c et R étant multipliés par b, R′ le sera ; R et R′ étant multipliés par b, 1 le sera : donc b est le plus grand diviseur commun à ab et cb.

Or b est facteur de cb, il divise par hypothèse ab ; divisant les deux nombres ab et cb, il doit diviser leur plus grand commun diviseur b.

Il résulte du principe précédent, que tout nombre premier qui divise un produit de facteurs est forcé de diviser au moins l'un d'eux.

En effet, soit P un nombre premier absolu, et $a.\ b.\ c$ un produit.

abc peut être considéré comme le produit de deux facteurs, ab et c; P divisant le produit, si on le suppose premier avec ab, divisera c.

Si P était premier avec c, il devrait diviser ab. S'il ne divisait pas a, il serait premier avec lui ; il diviserait donc b.

On déduit comme corollaire, que tout nombre premier absolu qui divise une puissance d'un nombre, divise ce nombre.

Tout nombre qui n'est pas premier est le produit d'un système fixe de facteurs premiers.

Soit en effet N un nombre, et A. B. C, A′. B′. C′ deux décompositions différentes en facteurs premiers. On devait avoir ABC $=$ A′B′C′, et par suite, en divisant les deux membres par A, BC $= \frac{A'B'C'}{A}$. Mais BC étant entier, $\frac{A'B'C'}{A}$ doit l'être, c'est-à-dire que A premier devant diviser exactement A′B′C′, produit de facteurs premiers eux-mêmes, ne peut remplir cette condition qu'autant qu'il est égal à l'un d'eux, ce qui prouve que les facteurs des deux décompositions doivent être identiques.

Une puissance d'un nombre ne contient pas de facteurs premiers nouveaux ; car élever le produit 2×3 au cube, c'est former le produit $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$.

On décompose un nombre en ses facteurs premiers, en essayant sa division par la suite naturelle des nombres premiers.

Exemple : décomposer 360 en ses facteurs premiers, on a $360 = 180 \times 2 = 90 \times 2 \times 2 = 45 \times 2 \times 2 \times 2 = 15 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$.

On dispose le calcul de la manière suivante :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	1

Un nombre divisible successivement par deux autres premiers entre eux, est divisible par leur produit.

Soit en effet N, le nombre divisible successivement par les nombres a et b premiers entre eux. On aura d'après l'hypothèse $\frac{N}{a}=$ un quotient entier q, d'où $N=aq$; et, divisant les deux membres par b, $\frac{N}{b}=\frac{aq}{b}$.

Mais $\frac{N}{b}$ doit être entier d'après la supposition, donc $\frac{aq}{b}$ doit l'être; ce qui exige qu'il divise q, puisqu'on l'a admis premier avec a; donc $\frac{q}{b}=q'$, d'où $q=bq'$.

Substituant dans $N=aq$, on aura $N=abq'$; donc ab étant un des facteurs de N, divise ce nombre.

Il en résulte que, le nombre 360 étant décomposé en ses facteurs premiers, aura pour diviseurs les combinaisons par voie de multiplication qu'on pourra effectuer entre ses facteurs premiers. Pour ne pas former les produits de diviseurs non premiers entre eux, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :

On multiplie le premier facteur par le second, puis les trois déjà formés par le facteur premier suivant, et ainsi de suite. Disposition du calcul :

360	2
180	2, 4
90	2, 8
45	3, 6, 12, 24
15	3, 9, 18, 36, 72
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.
1	

Dès qu'on sait former le tableau complet des diviseurs d'un nombre, si l'on effectue cette opération sur deux ou plusieurs nombres, il sera possible de dresser un tableau renfermant tous leurs diviseurs communs. Le plus grand de ces diviseurs sera leur plus grand diviseur. Il est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces différents nombres.

Quelques applications de la théorie des nombres premiers.

Une fraction dont les deux termes ont été privés de leur plus grand diviseur commun ne saurait se simplifier davantage.

En effet, soit $\frac{a}{b}$ une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux ; elle sera à cet état lorsqu'on aura supprimé aux deux termes leur plus grand diviseur commun.

Soit $\frac{a'}{b'}$ une autre fraction qui lui soit équivalente. On aura donc $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, et par suite $a'=\frac{ab'}{b}$. a' est entier ; b doit donc diviser ab' exactement, et par suite b', puisque a et b sont supposés premiers entre eux ; donc $\frac{b'}{b}=q$, donc $b'=bq$, et par suite $a'=\frac{abq}{b}=aq$. Les termes a' et b' de la fraction nouvelle sont donc le même multiple de ceux de la première fraction, qui alors est plus simple que toute autre fraction équivalente, et dite par suite irréductible.

Si on veut réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on peut souvent donner à ce nombre une valeur moindre que le produit de tous les dénominateurs. Car supposons les fractions irréductibles, et mises sous la forme

$$\frac{a}{2^3\times 3^2\times 5}\qquad \frac{b}{2^2\times 3\times 5^2}\qquad \frac{c}{2\times 3^2\times 7}.$$

On voit qu'on peut les ramener au dénominateur $2^3\times 3^2\times 5^2\times 7$, moindre que le produit des trois, et qu'on nomme le plus petit dénominateur commun. Il se compose des différents facteurs premiers des dénominateurs, chacun d'eux étant affecté du plus grand exposant qu'il a dans les différentes décompositions.

Réduction des fractions décimales en fractions ordinaires.

De même qu'on a pu d'une fraction ordinaire déduire une fraction décimale équivalente, on peut revenir de cette dernière à la première. La fraction décimale résultante de cette conversion pouvant se présenter sous trois formes distinctes,

1° Exacte, telle que..... 0,257
2° Périodique simple, telle que..... 0,383838
3° Périodique mixte..... 0,5474747

on va étudier séparément le retour de chacune de ces fractions décimales à la fraction ordinaire qui lui a donné naissance.

1° D'après la définition même de la fraction décimale, on peut écrire immédiatement

$$0,257 = \frac{257}{1000}.$$

2° Si on représente par x la fraction ordinaire équivalente au quotient décimal périodique simple, on aura l'équation $x = 0,383838$.

Pour éliminer la partie indéfinie, on multipliera les deux membres de cette équation par un nombre tel, que la transformée contienne la même partie illimitée, afin que dans la soustraction membre à membre elle disparaisse. On voit que dans ce cas le multiplicateur des deux membres sera 100, et l'on obtiendra $100x = 38,3838$, et, en retranchant les deux équations membre à membre,

$$99x = 38; \text{ d'où } x = \frac{38}{99}.$$

La fraction ordinaire qui a donné naissance au quotient périodique simple a donc pour numérateur une période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans une période.

3° Soit le quotient décimal périodique mixte,

0,5373737 qu'on représente par x,

on aura $x = 0,53737373737$.

En multipliant les deux membres par 10, on aurait $10x = 5,3737$, et en remplaçant la partie périodique indéfinie simple par la frac-

tion ordinaire equivalente $\frac{37}{99}$, on parvient à l'équation en termes finis,

$$10x = 5 + \frac{37}{99}, \text{ d'où } x = \frac{5 + \frac{37}{79}}{10}.$$

Mais comme cette expression est difficile à interpréter d'une manière claire, on peut, pour éviter de la transformer, ce qui serait d'ailleurs possible, en obtenir une autre de forme plus commode en multipliant successivement les deux membres de l'équation par des nombres tels, que la virgule se transporte alternativement en tête de la première période et à sa suite, ce qui donnera

$$10x = 5{,}373737,$$
$$1000x = 537{,}373737;$$

retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$990x = 537 - 5, \text{ d'ou } x = \frac{537 - 5}{990}.$$

On voit donc que le numérateur se compose de la partie mixte suivie d'une période et diminuée de la partie mixte, le dénominateur étant formé d'autant de 9 qu'il y avait de chiffres dans une période, suivis d'autant de zéros qu'il y avait de chiffres dans la partie mixte.

Pour savoir si l'on ne pourrait reconnaître d'avance à quelle nature de quotient décimal donnera naissance la transformation d'une fraction ordinaire, il est nécessaire d'étudier la loi de composition des dénominateurs des trois fractions ordinaires

$$\frac{257}{1000}, \frac{38}{99}, \frac{537 - 5}{990}.$$

Aucune de ces fractions n'est forcément irréductible, mais leur simplification ne pourra introduire à leur dénominateur de facteurs premiers étrangers à ceux qui déjà y sont renfermés.

La première ayant pour dénominateur une puissance de 10, ne contient pas de facteurs étrangers à 2 et à 5.

Le dénominateur de la seconde, terminé par un chiffre 9, ne renferme que des facteurs étrangers à 2 et à 5.

Pour analyser le dénominateur de la troisième, il faut d'abord

observer que le numérateur exprime le reste d'une soustraction, reste qui ne pourra jamais se terminer par un zéro; car il faudrait pour cela que le dernier chiffre d'une période fût égal au dernier chiffre de la partie mixte, ce qui ne se peut.

Le dénominateur terminé par un zéro au moins renferme les deux facteurs premiers 2 et 5. Le numérateur ne peut contenir que l'un de ces facteurs; donc, après simplification, le dénominateur renfermera au moins l'un de ces facteurs autant de fois qu'il y avait de zéros ou de chiffres dans la partie mixte.

On peut de là prévoir que toute fractiou ordinaire irréductible, dont le dénominateur ne renferme pas de facteurs premiers étrangers à 2 et à 5, donne naissauce à un quotient décimal exact;

Que toute fraction ordinaire irréductible, dont le dénominateur est composé de facteurs premiers étrangers à 2 et à 5, donne un quotient périodique simple; et qu'enfin si le dénominateur est formé d'une combinaison de facteurs premiers, soit 2, soit 5, soit des deux avec des facteurs étrangers, elle donne naissance à un quotient périodique mixte.

Exemples : $\frac{7}{5\times5\times2}=\frac{7\times2}{5\times5\times2\times2}=\frac{14}{100}$;

$$\frac{5}{3\times7}=\frac{5}{21}=0{,}238095238095\ldots.$$

$$\frac{7}{3\times2\times2}=0{,}5833333\ldots.$$

EXTRACTION DES RACINES.

Extraire la racine carrée d'un nombre, c'est le décomposer en deux facteurs identiques.

Avant d'entreprendre cette opération, il est nécessaire de revenir sur les lois de la composition du carré.

Tout nombre entier 237 peut être regardé comme formé de la réunion ou addition de 23 dizaines et de 7 unités.

Or, le carré d'un nombre composé de deux parties est toujours formé de trois parties, savoir : le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, et le carré des mêmes unités.

Mais le carré des dizaines est toujours des centaines.

Le double produit des dizaines par les unités est toujours des dizaines. Lorsqu'on fera donc la somme des trois parties citées précédemment, et qui sont telles que la première se termine par deux zéros, la seconde par un zéro, le carré total sera terminé par le chiffre qui terminait le carré de 7. Or, en élevant au carré les neuf premiers nombres consécutifs, aucun de ces carrés ne se termine par les chiffres 2, 3, 7, 8.

On peut donc dire qu'un nombre entier qui se termine par un de ces chiffres ne saurait être le carré d'un nombre entier.

Il ne peut être non plus le carré d'un nombre fractionnaire, car si on admet l'égalité, $\sqrt{N} = n + \frac{a}{b}$; N et n étant des nombres entiers, et $\frac{a}{b}$ une fraction qu'on peut toujours regarder comme réduite à sa plus simple expression. En élevant les deux membres au carré, et les multipliant ensuite par b, on trouverait $Nb = n^2b + 2an + \frac{a^2}{b}$, égalité qui ne saurait exister; car le second membre devrait être entier, puisque le premier l'est, ce qui exigerait que $\frac{a^2}{b}$ fût entier, ou que b divisât a^2 exactement; condition impossible à remplir, puisque a et b étant premiers entre eux a^2 et b le sont eux-mêmes.

Un nombre entier qui n'a pas de racine carrée exacte en nombre entier ne saurait donc en avoir d'exacte en nombre fractionnaire. Cette racine, comprise entre deux nombres entiers consécutifs, a reçu le nom de racine incommensurable.

Le carré d'une fraction se composant des carrés superposés de ses deux termes, on doit extraire la racine en effectuant cette opération successivement sur le numérateur et le dénominateur.

Les nombres décimaux peuvent eux-mêmes se mettre sous la forme de nombres fractionnaires ayant leurs termes entiers ; il faut donc étudier spécialement l'extraction de la racine carrée des nombres entiers.

Les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, élevés au carré, donnent les résultats suivants : 1, 100, 10000, 1000000, 100000000.

Donc, tous les nombres entiers compris entre deux termes consécutifs de la seconde suite auront leurs racines comprises entre les deux correspondants de la première.

Or, tous les nombres entiers compris entre 1 et 100 ont un ou deux chiffres.

Leur racine entière, comprise entre 1 et 10, sera formée d'un seul chiffre. Tous les nombres entiers compris entre 100 et 10000 ont trois ou quatre chiffres ; leur racine comprise entre 10 et 100 sera formée de deux chiffres. On étendrait cette observation à n'importe quelle limite.

On déduit de là que pour connaître le nombre des chiffres de la racine carrée d'un nombre entier, il faut le partager en tranches de deux chiffres, n'importe dans quel sens. Autant il renfermera de tranches, autant la racine entière contiendra de chiffres.

Si la racine ne doit avoir qu'un chiffre, la table de Pythagore suffit pour l'obtenir.

Passons au cas où elle en aurait deux, et soit choisi pour exemple le nombre 5746.

On devra le considérer comme étant la somme des trois parties du carré de tout binôme.

Il faut chercher à désunir, autant qu'on le pourra, ces trois parties les unes des autres.

Le carré des dizaines fournissant toujours des centaines, les deux chiffres des dizaines et unités n'intéresseront pas cette partie, qui sera renfermée dans le nombre 5700.

Le nombre 57 devant renfermer le carré du chiffre des dizaines de la racine, auquel des carrés renfermés dans 57 faut-il s'adresser pour l'obtenir ? Au plus grand de ceux que 57 contient. En effet :

57 est compris entre 64 et 49; donc, 5700 est compris entre 6400 et 4900, et diffère de chacun de ces nombres d'au moins une centaine; donc, 5746 est encore renfermé entre eux, et par suite sa racine inconnue est comprise entre 80 et 70, racines de ces nombres. Celle cherchée est donc composée de 7 dizaines, augmentées d'un chiffre d'unité.

De là cette règle première : divisez le nombre en tranches de deux chiffres allant de droite à gauche, et extrayez la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, pour avoir le chiffre des dizaines de la racine.

Ces dizaines obtenues, élevées au carré et retranchées du nombre proposé, ne laissent plus subsister dans le reste 846 que le double produit des dizaines par les unités inconnues et le carré des unités.

On va de nouveau chercher à séparer ces deux parties l'une de l'autre.

Le double produit des dizaines par les unités fournissant toujours des dizaines ou un nombre terminé par un zéro, c'est dans 840 que sera renfermé la partie traitée en ce moment. 84 dizaines renferment cette partie, plus les dizaines pouvant provenir du carré du chiffre des unités.

Si donc on divise 84 par 14, double du nombre des dizaines de la racine, et qu'on prenne le plus grand quotient d'un seul chiffre, on est certain d'avoir le chiffre des unités de la racine, ou un chiffre trop grand.

Avant donc d'écrire ce résultat à la racine, il faut l'essayer.

Le premier moyen qui se présente à l'esprit, c'est d'élever la racine au carré, et de voir si le résultat est égal au nombre proposé ou plus petit que lui, auquel cas on l'inscrirait définitivement à la racine. S'il était plus grand, on diminuerait successivement le chiffre essayé d'une unité, jusqu'à ce qu'il soit convenable.

Cet essai s'effectue plus promptement, en écrivant le chiffre essayé à la suite du double de celui des dizaines, et multipliant le nombre ainsi formé par le chiffre essayé. On formera par là simultanément les deux parties du carré dont le reste 846 est composé,

et ce résultat devra pouvoir se retrancher du nombre 846. Voici la disposition du calcul :

57,46	75	
49	146	145
846	6	5
725	876	725
121		

Le quotient de 84 par 14 était bien 6 ; mais ce chiffre était trop grand pour la racine, puisque, essayé par la méthode indiquée précédemment, il donnait 876, plus grand que 846. On l'a diminué, et l'essai de celui 5 ayant réussi, on a trouvé pour racine carrée de 5746 le nombre 75, avec un reste 121.

On reconnaît que, la racine étant comprise entre 75 et 76, on a le droit de nommer 75 la racine obtenue à moins d'une unité, ou la racine du plus grand carré entier renfermé dans le nombre 5746.

Du moment où le nombre proposé exprimait une collection d'unités, et que la racine 75 est en erreur de moins d'une unité, on dit qu'elle est obtenue avec son approximation naturelle.

Le raisonnement précédent peut s'étendre à l'extraction de la racine carrée d'un nombre composé de n'importe combien de chiffres.

Soit 78,35,62. Le nombre étant composé de trois tranches, aura trois chiffres à la racine, des centaines, dizaines et unités. Il sera toujours composé des trois parties du carré ; seulement les dizaines de la racine auront deux chiffres qu'on trouvera en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans 7835, ce qui revient à extraire la racine de ce nombre à moins d'une unité. Cette racine est 88, et donne 91 pour reste.

Il y a donc encore un reste total 9162, composé du double produit des dizaines par les unités et du carré des unités.

Si donc on divise, comme dans le premier exemple, 916 par le double de 88, on aura le chiffre des unités, en ayant le soin de l'essayer avant de l'écrire à la racine.

On peut, en réunissant les deux opérations que l'on vient d'exécuter, en conclure cette règle générale :

Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on doit le partager en tranches de deux chiffres de droite à gauche, la première à gauche pouvant ne contenir qu'un seul chiffre; autant de tranches, autant de chiffres à la racine.

Extrayant la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, on a le chiffre des plus hautes unités de la racine.

Élevant ce chiffre au carré, et soustrayant ce résultat de la tranche sur laquelle on a opéré, on obtient un reste à côté duquel on descend la tranche suivante; on sépare le dernier chiffre de ce premier reste, et on divise la partie restante à gauche par le double de la racine déjà obtenue : ce quotient d'un chiffre, après avoir été essayé, formera le second chiffre de la racine. On obtient donc par suite de cet essai un nouveau reste à côté duquel on abaisse la tranche suivante, et l'on continue une opération analogue jusqu'à ce que la dernière tranche soit abaissée.

Pour avoir la racine carrée d'une fraction, il faudrait, d'après la loi de composition du carré, extraire les racines de ses deux termes : ainsi la racine de $\frac{9}{16}$ serait $\frac{3}{4}$, celle de $\frac{10}{18}$ serait aussi $\frac{3}{4}$. La première est exacte, la seconde en erreur, et on ignore toute limite de cette erreur, puisque le numérateur et le dénominateur sont tous deux en défaut. On obvie à cet inconvénient en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{10}{18}$ par son dénominateur; elle devient alors, sans changer de valeur, $\frac{180}{18^2}$, et par suite sa racine est comprise entre $\frac{23}{18}$ et $\frac{24}{18}$; $\frac{23}{18}$ est donc la racine de la fraction avec son approximation naturelle, ou à moins d'un dix-huitième, espèce des unités dont elle était composée.

Pour avoir la racine carrée d'un nombre décimal avec son approximation naturelle, il faut commencer par ajouter à sa droite autant de zéros qu'il renfermait de chiffres décimaux; puis extraire la racine de ce nombre considéré comme entier, et séparer sur la droite du résultat autant de chiffres par une virgule qu'il y avait de chiffres décimaux dans le nombre proposé. En effet,

$$3{,}725 = \frac{3725}{1000} = \frac{3725000}{1000^2};$$

donc

$$\sqrt{3{,}725} = \sqrt{\frac{3725000}{1000^2}}.$$

Extrayant la racine du numérateur à moins d'une unité, et la racine exacte 1000 du dénominateur, on aura la racine obtenue à moins de 1 millième.

Approximation plus grande que celle naturelle.

Dans beaucoup de questions, la racine obtenue avec l'approximation naturelle étant insuffisante, on a dû se procurer une approximation plus grande.

Soit donc proposé d'extraire la racine carrée du nombre entier N avec une approximation marquée par la fraction $\frac{1}{a}$.

Si l'on mettait le nombre N sous la forme fractionnaire, ayant pour dénominateur a, il suffirait d'extraire la racine avec l'approximation naturelle ; elle serait à moins de $\frac{1}{a}$.

On a donc :

$$N = \frac{Na}{a} = \frac{Na^2}{a^2}; \text{ donc } \sqrt{N} = \sqrt{\frac{Na^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{Na^2}}{a}.$$

On doit donc multiplier le nombre proposé par le carré du dénominateur de la fraction d'approximation, extraire la racine du produit à moins d'une unité, et diviser ce résultat par le dénominateur de la fraction d'approximation.

Exemple : Extraire la racine de 2758 à moins de $\frac{1}{7}$.

Le produit de 2758 par 49, carré du dénominateur 7, est 135142, ayant pour racine 367 à moins d'une unité; donc $\frac{367}{7}$ est la racine cherchée à moins de $\frac{1}{7}$.

Si la fraction d'approximation était $\frac{4}{9}$, c'est-à-dire, n'avait pas pour numérateur l'unité, on composerait une nouvelle fraction moindre que la proposée ayant pour numérateur l'unité. Pour atteindre ce but, on divisera les deux termes par le numérateur 4, ce qui donnera $\frac{1}{\frac{9}{4}}$; au dénominateur $\frac{9}{4}$, on substituera le nombre entier 3 qui lui est immédiatement supérieur, et on obtiendra ainsi la fraction $\frac{1}{3}$. La racine extraite à moins de $\frac{1}{3}$ le sera à fortiori à moins de $\frac{4}{9}$.

Si l'approximation doit être décimale, le raisonnement ne se modifie en rien, mais les opérations s'effectuent plus simplement. Extraire la racine de 69 à moins de $\frac{1}{10}$

Le produit de 69 par 100, carré de 10, est 6900. La racine de ce nombre à moins d'une unité est 83 ; donc la racine de 69 à moins de $\frac{1}{10}$ est 8,3.

On a en conséquence adopté cette règle pratique :

Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier avec une approximation décimale déterminée, il faut,

1° Ajouter au nombre entier autant de fois deux zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine ;

2° Extraire la racine du nouveau nombre à moins d'une unité ;

3° Séparer sur la droite de cette racine autant de chiffres par une virgule qu'on avait ajouté de tranches de deux zéros.

Pour apprendre à extraire la racine du nombre décimal 72,54 à moins de $\frac{1}{1000}$, si on le met sous forme fractionnaire, il devient $\frac{7254}{100}$.

Pour obtenir la racine à moins de $\frac{1}{1000}$, il faut que le dénominateur devienne le carré de 1000, ou l'unité suivie de six zéros ; il y en a donc quatre à ajouter à ses deux termes, ce qui donne

$$\frac{72540000}{1000^2}.$$

L'opération s'achève alors comme il a été dit précédemment ; et de là cette règle : Pour extraire la racine carrée d'un nombre décimal avec une approximation plus grande que celle naturelle, il faut ajouter à la droite du nombre assez de zéros pour qu'il contienne deux fois plus de chiffres décimaux qu'on n'en veut avoir à la racine. On extrait la racine de ce nouveau nombre sans avoir égard à la virgule, et on sépare sur la droite de ce résultat autant de chiffres par une virgule qu'on voulait avoir de chiffres décimaux à l'approximation.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

Les procédés et démonstrations de la racine cubique sont en tout analogues à ceux de la racine carrée, en tenant compte des quatre parties du cube d'un nombre décomposé en deux parties.

Le cube de $a + b$ étant $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

On est en droit de conclure que le cube d'un nombre décomposé en dizaines et unités est composé de trois parties, savoir :

1° du cube des dizaines;

2° du triple produit du carré des dizaines par les unités;

3° du triple produit des dizaines par le carré des unités;

4° du cube des unités.

Les cubes des nombres 1, 10, 100, 1000
étant 1, 1000, 1000000, 1000000000,
on voit que tous les nombres entiers de un, deux ou trois chiffres ont un chiffre à leur racine cubique, que ceux de quatre, cinq, six chiffres en ont deux; ainsi de suite.

Un nombre entier a donc autant de chiffres à sa racine cubique qu'il renferme de tranches de trois chiffres, la dernière tranche pouvant être incomplète et ne contenir que un ou deux chiffres.

Les cubes des neuf premiers nombres étant terminés par les neuf chiffres, on ne peut pas, comme dans la racine carrée, décider, à l'inspection du dernier chiffre d'un nombre entier, qu'il ne peut pas être un cube.

Soit à extraire la racine cubique du nombre 576849.

La racine aura deux chiffres, l'un de dizaines, l'autre d'unités; il doit donc renfermer les quatre parties du cube.

Le cube des dizaines étant toujours des mille, les trois derniers chiffres à droite ne pourront en faire partie; c'est donc dans 576000 que se trouvera le cube des dizaines, ou, ce qui revient au même, dans 576 que se trouvera renfermé le cube du chiffre des dizaines.

Comme il y a plusieurs cubes renfermés dans 576, il faut savoir auquel d'entre eux on doit s'adresser; c'est au plus grand. On démontre ce principe comme pour les carrés.

La suite des raisonnements déjà faits précédemment s'appliquant à cette opération nouvelle, on a établi cette règle générale :

Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, on doit le séparer en tranches de trois chiffres en allant de droite à gauche, et commencer par extraire la racine du plus grand cube renfermé dans la première tranche à gauche, pour avoir le chiffre des plus hautes unités de la racine.

Retranchant de la partie sur laquelle on a opéré le cube du chiffre trouvé à la racine, et descendant à la suite de ce reste la tranche suivante, on sépare les deux derniers chiffres à droite par une virgule, et on divise la partie restante à gauche par le triple

carré de la racine déjà obtenue ; on a pour quotient le chiffre des unités, ou un chiffre trop grand. On l'essaye en élevant au cube la racine trouvée, et voyant si elle peut se retrancher de la partie formée par les deux premières tranches à gauche du nombre donné.

Si on obtient donc un reste, on abaisse à sa suite la tranche suivante, on sépare de ce résultat les deux derniers chiffres par une virgule, et, divisant la partie restante à gauche par le triple carré de la racine déjà trouvée, on a un nouveau chiffre de la racine qu'on y place après l'avoir essayé ; et ce genre d'opération se continue jusqu'à ce que la dernière tranche à gauche soit abaissée.

Cette racine obtenue ainsi est à moins d'une unité.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction avec son approximation naturelle, on multiplie ses deux termes par le carré du dénominateur.

Alors on extrait la racine cubique du numérateur nouveau à moins d'une unité, et on lui donne pour dénominateur le dénominateur de la fraction primitive.

Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier avec une approximation marquée par une fraction ayant pour numérateur l'unité, on multiplie le nombre proposé par le cube du dénominateur de la fraction d'approximation.

Pour extraire la racine d'un nombre entier avec une approximation décimale, on ajoute autant de tranches de trois zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à l'approximation.

Puisque pour élever au carré ou au cube un produit de facteurs, on doit élever à la puissance chacun des facteurs séparément, pour extraire une racine d'un produit de facteurs, on doit extraire séparément la racine de chaque facteur.

Ainsi, $\sqrt{9 \times 16 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 3 \times 4 \times 5.$

PROPORTIONS.

On nomme rapport par différence l'expression de la différence de deux nombres.

Ainsi, $7 - 3$ est un rapport par différence.

On nomme rapport par quotient l'indication de la division à effectuer entre deux nombres.

Ainsi, $\frac{7}{5}$ est un rapport par quotient qu'on écrit aussi $7:5$, et qu'on est convenu de prononcer ainsi : 7 *est à* 5.

L'expression de l'égalité de deux rapports a reçu le nom de proportion.

Ainsi, $7 - 3 = 9 - 5$ est une proportion par différence.

$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ est une proportion par quotient. On va s'occuper spécialement de ces dernières, qu'on écrit aussi sous la forme $7:5::14:10$, et qu'on prononce : 7 *est à* 5 *comme* 14 *est à* 10.

Les termes 7 et 10, qui sont aux extrémités, se nomment extrêmes.

Ceux 5 et 14, qui sont entre les deux extrêmes, se nomment moyens.

Les premiers termes de chaque rapport, 7 et 14, se nomment antécédents.

Ceux 5 et 10 qui les suivent, conséquents.

D'après la définition, il suffit, pour former une proportion, d'écrire le premier rapport venu, $\frac{2}{3}$ par exemple, et de multiplier ses deux termes par un même nombre. On obtient par là un nouveau rapport égal au premier, et par suite une proportion.

Puisqu'on nomme rapport une expression sous forme fractionnaire, on n'altère pas sa valeur en multipliant ou divisant les deux termes par un même nombre. Il est donc permis dans une proportion de multiplier ou de diviser les deux termes d'un des rapports par un même nombre.

Dans toute proportion par quotient le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

En effet, soit la proportion $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, on peut, sans changer la valeur du premier rapport, multiplier les deux termes par un nombre tel, qu'ils deviennent identiquement égaux à ceux du second. La

Digitized by Google

proportion devient $\frac{8}{12} = \frac{8}{12}$, et dans ce cas il est manifeste que les deux produits des extrêmes et des moyens sont égaux, comme composés des mêmes facteurs.

Or, pour obtenir ces nouveaux produits, il a fallu multiplier les facteurs 2 et 3 des anciens par le même nombre; donc le produit des anciens extrêmes était égal à celui des anciens moyens.

Autre démonstration :

En effet, soit la proportion $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ou $2:3::6:9$.

En réduisant les deux membres au même dénominateur, ils seront encore égaux, et l'on aura $\frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{6 \times 3}{9 \times 3}$.

Or, deux fractions égales de même dénominateur ont leurs numérateurs égaux, et ces numérateurs sont essentiellement les produits des extrêmes et des moyens; donc, etc.

Réciproquement, si quatre nombres sont tels que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ils forment une proportion dans l'ordre où ils sont écrits; en effet, soient les quatre nombres 2, 3, 6, 9, tels qu'ils donnent l'égalité $2 \times 9 = 3 \times 6$, en divisant les deux membres par un même nombre 3×9, il y aura encore égalité, ce qui donnera

$\frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{3 \times 6}{3 \times 9}$, et, en simplifiant la proportion, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$. C. Q. F. D.

Le produit des extrêmes étant nécessairement égal à celui des moyens, en divisant le produit des extrêmes par un des moyens, on trouve pour quotient l'autre moyen.

On dit, en conséquence, qu'un extrême est égal au produit des moyens, divisé par l'autre extrême; et, de même, qu'un moyen est égal au produit des extrêmes, divisé par l'autre moyen.

Il en résulte qu'étant donnés les trois premiers termes d'une proportion, on trouve le terme qui la termine en divisant par le premier le produit du second et du troisième.

Par suite, ce quatrième terme peut, dans certaines circonstances, être entier, et, dans d'autres, fractionnaire. Si les trois termes donnés sont 2, 3, 4, le quatrième sera 6; si les trois termes étaient 2, 3, 5, le quatrième serait $\frac{15}{2}$.

Si deux produits composés chacun de deux facteurs sont égaux, on peut avec les quatre facteurs former une proportion. Il suffit,

en effet, de prendre les deux facteurs du premier produit pour extrêmes, et les deux du second pour moyens. Ainsi de l'égalité $2 \times 12 = 3 \times 8$, on déduit la proportion $2:3::8:12$.

De ce que quatre nombres, tels que 3, 5, 6, 10, forment une proportion, il n'en résulte pas que l'ordre dans lequel ils sont écrits soit indifférent. Ainsi, dans l'ordre 3, 10, 5, 6, la proportion n'existe plus, puisque le produit des extrêmes n'est plus égal à celui des moyens.

Il est donc intéressant d'étudier les changements d'ordre qui ne faussent pas l'expression.

Tous ceux qui laisseront le produit des extrêmes égal à celui des moyens, seront des changements légitimes.

Ainsi, le changement d'ordre des moyens, le changement d'ordre des extrêmes entre eux, et la permutation de moyens à extrêmes, sont des opérations usuelles.

Exemples :

$2:3::6:9$

$2:6::3:9$, changement d'ordre des moyens;

$9:3::6:2$, changement d'ordre des extrêmes;

$3:2::9:6$, permutation entre les moyens et les extrêmes.

Mais ces trois nouvelles proportions ne sont pas les mêmes que la première, puisque leurs premiers rapports sont pour la première $\frac{2}{3}$, pour la deuxième $\frac{2}{6}$, pour la troisième $\frac{9}{3}$, pour la quatrième $\frac{3}{2}$.

On ne dit donc pas qu'une proportion ne change pas, mais bien que sa vérité n'est pas altérée, lorsqu'on y exécute les changements d'ordre précédents.

Le changement d'ordre des rapports n'eût pas altéré la proportion. Celle $6:9::2:3$ est la même que la première.

Si dans une proportion les deux moyens sont égaux, elle prend le nom de proportion continue, et l'on dit alors que le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, ou que le moyen est égal à la racine carrée du produit des extrêmes.

Lorsque deux proportions ont un rapport commun, avec les rapports non communs on peut établir une proportion.

Soit, en effet, $2:3::6:9$ et $2:3::8:12$, ou $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

Deux nombres égaux au même troisième $\frac{2}{3}$, sont égaux entre eux ; on a donc $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$, ou la proportion $6:9::8:12$.

Si les extrêmes de deux proportions sont égaux, les moyens sont inversement proportionnels. En effet, soient les deux proportions :

$$2:3::8:12,$$
$$2:4::6:12.$$

La première fournit l'égalité $2 \times 12 = 3 \times 8$, et la seconde $2 \times 12 = 4 \times 6$.

Donc : $3 \times 8 = 4 \times 6$, et par suite la proportion $3:4::6:8$. C. Q. F. D.

Si les moyens étaient égaux, les extrêmes formeraient une proportion réciproque.

Si deux proportions ont les trois premiers termes égaux et dans le même ordre, leurs quatrièmes termes doivent être égaux, puisque leurs valeurs seront composées de la même manière avec les mêmes nombres.

Ainsi dans les proportions :

$$a:b::c:d,$$
$$a:b::c:d'.$$

On a $\quad d = \frac{b \times c}{a}, \quad d' = \frac{b \times c}{a}; \quad$ donc $\quad d = d'$.

En multipliant deux proportions terme à terme, on en compose une nouvelle. En effet, soient les deux proportions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d};$$

on aura $\quad \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'},$

ou, d'après le principe de la multiplication des fractions :

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = \frac{c \times c'}{d \times d'},$$

qui se met sous la forme $a \times a' : b \times b' :: c \times c' : d \times d'$.

Comme corollaire de ce principe, on peut élever tous les termes d'une proportion au carré sans nuire à sa vérité, puisque c'est multiplier ses termes par ceux d'une proportion identique.

On peut donc aussi indiquer l'extraction de la racine carrée des différents termes d'une proportion.

COMBINAISONS DES TERMES D'UNE PROPORTION.

On peut, en combinant entre eux les termes d'une proportion de différentes manières, en déduire de nouvelles proportions exactes.

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a : b :: c : d$.

Puisqu'en ajoutant au numérateur d'un rapport son dénominateur, la valeur du rapport augmente d'une unité, on aura la nouvelle égalité

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

ou, sous une autre forme, $a+b : b :: c+d : d$, ce qui s'énonce ainsi : La somme des deux premiers termes est au second comme la somme des deux derniers est au quatrième.

On aurait pu également retrancher à chaque numérateur son dénominateur, et l'on aurait eu $a-b : b :: c-d : d$, ou : la différence des deux premiers termes est au second comme la différence des deux derniers est au quatrième.

Rapprochant l'une de l'autre ces deux combinaisons, et y changeant les moyens de place, elles fournissent les deux proportions :

$$a+b : c+d :: b : d,$$
$$a-b : c-d :: b : d,$$

qui, par suite du rapport commun, conduisent à la proportion nouvelle $a+b : a-b :: c+d : c-d$, que l'on énonce ainsi :

Dans toute proportion la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence.

On pourrait faire porter ces combinaisons sur les antécédents et les conséquents ; car, en les appliquant à la proportion $a : c :: b : d$ transformée de cette autre, $a : b :: c : d$, elles donnent :

$$a+c : b+d :: c : d, \quad a-c : b-d :: c : d,$$
$$a+c : a-c :: b+d : b-d.$$

Nouveaux principes qui s'énoncent des manières suivantes :

1° La somme des antécédents est à celle des conséquents comme un antécédent est à son conséquent;

2° La différence des antécédents est à celle des conséquents comme un antécédent est à son conséquent;

3° La somme des antécédents est à leur différence comme la somme des conséquents est à leur différence.

Des rapports égaux en nombre quelconque, tels que :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

constituent une suite proportionnelle que l'on écrit sous cette forme :

$$a:b::c:d::m:n::p:q,$$

et l'on peut en déduire toutes les proportions qui résultent de l'assemblage de deux quelconques de ces rapports.

Dans la proportion composée des quatre premiers termes, on peut faire la combinaison $a+c:b+d::c:d$, et remplacer le rapport $c:d$ par celui égal $m:n$. On a donc $a+c:b+d::m:n$, de laquelle, soumise à la même combinaison, on déduit

$$a+c+m:b+d+n::m:n, \text{ ou } ::p:q,$$

qui, traitée aussi de la même manière, donne

$$a+c+m+p:b+d+n+q::p:q,$$

ou : la somme des antécédents est à celle des conséquents comme un antécédent est à son conséquent; ou bien aussi :

La somme d'un certain nombre d'antécédents est à celle des conséquents qui leur correspondent comme un antécédent est à son conséquent.

Ce genre de combinaison s'emploie lorsqu'on veut faire intervenir dans une proportion tous les termes d'une suite proportionnelle.

Les proportions par quotient doivent être considérées comme étant des équations du premier degré, mises sous des formes particulières.

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue, ou trouver un extrême dans une proportion, c'est résoudre le même problème.

Les combinaisons des termes dans une proportion, ou les combinaisons de plusieurs proportions, ne sont également que des pro-

cédés d'élimination appliqués aux équations mises sous cette forme particulière.

Exemple. Si 3 ouvriers en 6 jours ont fait 8 mètres d'ouvrage, combien 7 ouvriers en 5 jours feront-ils de mètres du même ouvrage?

En désignant par x le nombre cherché, et par y l'ouvrage fait par les seconds s'ils travaillent six jours comme les premiers, on dira :

Les ouvrages accomplis varient proportionnellement au nombre des ouvriers ; d'où la proportion

$$3 : 7 :: 8 : y;$$

d'autre part, le travail accompli varie proportionnellement au nombre des jours ; donc,

$$6 : 5 :: y : x.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer l'inconnue auxiliaire y entre ces deux proportions ; ce qui s'effectuera en les multipliant terme à terme, car alors on aura $3 \times 6 : 7 \times 5 :: 8 \times y : y \times x$, ou $3 \times 6 : 7 \times 5 :: 8 : x$, en supprimant y, facteur commun aux deux termes du dernier rapport. Si les deux proportions avaient eu leurs termes disposés dans un autre ordre, telles que les suivantes :

$$3 : 5 :: 7 : y,$$
$$8 : 4 :: x : y,$$

c'est par la division terme à terme que y se serait éliminée, et aurait conduit au résultat

$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} :: \frac{7}{x} : 1$, d'où $\frac{3}{8} = \frac{35}{4x}$, et par suite $12x = 280$ ou $x = \frac{280}{12}$.

Soit proposé de trouver deux nombres dont la somme égale 4, et qui soient entre eux dans le rapport de 5 à 7. Désignant par x et y ces deux nombres, on aura les deux relations $x + y = 4$, $x : y :: 5 : 7$. Pour éliminer x, on fera dans la proportion la combinaison connue $x + y : y :: 5 + 7 : 7$, et remplaçant $x + y$ par sa valeur 4 fournie par l'équation

$$4 : y :: 5 + 7 : 7.$$

Pour éliminer y, on aurait fait cette autre combinaison analogue :

$$x + y : x :: 5 + 7 : 5, \text{ ou } 4 : x :: 5 + 7 : 5.$$

Partager 92 en trois parties telles, que la première soit à la deuxième comme 3 : 5, et la deuxième à la troisième comme 6 : 8.

En désignant par x, y, z les trois parties cherchées, on a, d'après l'énoncé, les trois relations $x+y+z=92$,

$$x : y :: 3 : 5,$$
$$y : z :: 6 : 8.$$

S'il était possible de déduire de ces proportions une suite proportionnelle, alors, par un *componendo*, on trouverait trois proportions ne renfermant dans chaque qu'une inconnue. Comme les proportions données ont déjà un terme commun, en mettant dans la deuxième extrêmes pour moyens et moyens pour extrêmes, les deux termes y se correspondront, et l'on aura :

$$x : y :: 3 : 5,$$
$$z : y :: 8 : 6.$$

Les premiers conséquents étant égaux, pour que les seconds le deviennent, il suffit de multiplier par 6 les deux termes du second rapport de la première, et par 5 ceux du second rapport de la seconde; on obtient alors

$$x : y :: 18 : 30,$$
$$z : y :: 40 : 30;$$

et changeant les moyens de place,

$$x : 18 :: y : 30,$$
$$z : 40 :: y : 30;$$

et comme conséquence la suite proportionnelle

$$x : 18 :: y : 30 :: z : 40.$$

On aura donc, par un *componendo* connu,

$$x+y+z : 18+30+40 :: z : 40,$$
$$x+y+z : 18+30+40 :: y : 30,$$
$$x+y+z : 18+30+40 :: x : 18;$$

remplaçant $x+y+z$ par sa valeur 92, et simplifiant,

$$92 : 88 :: z : 40,$$
$$92 : 88 :: y : 30,$$
$$92 : 88 :: x : 18,$$

desquelles on déduira les valeurs de x, y et z.

On aurait pu, des deux proportions proposées, déduire les équations $5x=3y$, $8y=6z$, qui, unies à celle $x+y+z=92$, au-

raient formé un système de trois équations à trois inconnues fournissant les valeurs de chacune d'elles.

Ces exemples suffisent pour légitimer les observations qui ont précédé.

Problèmes résolus au moyen des proportions.

Le 5 juin 1851, à 3 heures du soir, la distance de la lune au soleil sera $74^\circ\ 47'\ 56''$,
à 6 heures du soir, $76^\circ\ 27'\ 7''$.

On demande à quelle heure elle sera de $75^\circ\ 58'\ 30''$, en admettant que les distances varient proportionnellement au temps?

La différence des deux distances données est de $1^\circ\ 39'\ 11''$, et entre la première des deux et la troisième elle est de $1^\circ\ 10'\ 34''$; on posera en conséquence la proportion:

Si, pour que la distance augmente de $1^\circ\ 39'\ 11''$, il s'est écoulé 3 heures, pour qu'elle augmente de $1^\circ\ 10'\ 34''$, combien s'écoulera-t-il de temps, ou la proportion

$$1^\circ\ 39'\ 11'' : 3^h :: 1^\circ\ 10'\ 34'' : x, \text{ d'où}$$

$$x = 3^h \times \frac{1^\circ\ 10'\ 34''}{1^\circ\ 39'\ 11''}.$$

Convertissant en secondes le numérateur, et le dénominateur aussi, on trouve

$$x = 3^h \times \frac{4234}{5951} = \frac{12702^h}{5951} = 2^h\ \overline{8^m\ 4^s}.$$

Ce temps, ajouté à 3^h ou 5^h, $\overline{8^m\ 4^s}$, sera l'heure correspondante à la distance donnée.

Le 18 juin, à 6 heures du matin, la distance était de

$117^\circ\ 34'\ 48^s$,
a 9 heures de $116\ \ 12\ \ 53$;

quelle heure sera-t-il lorsque cette distance sera de $116^\circ\ 31'\ 25''$?

Raisonnant comme dans l'exemple précédent, dont celui-ci ne diffère que parce que la distance diminue au lieu d'augmenter, on posera la proportion $1^\circ\ 21'\ 55'' : 3^h :: 1^\circ\ 3'\ 23'' : x$.

x devra être ajouté à 6 heures pour former l'heure cherchée.

Le 15 avril à midi, le soleil était à 9° 39′ 4″,6 de l'équateur.

Le 16 à midi, à 10° 0′ 28″,5 idem.

Quelle sera sa distance le 16 à 7h 27m 48s matin?

La distance a donc, en 24 heures, augmenté de 0° 21′ 23″, 9.

Puisqu'en 24 heures elle augmente de 21′ 23″, 9, de combien aura-t-elle augmenté dans 19h 27m 48s, différence entre le midi du 15 et 7h 27m 48s du matin le 16?

Pour 12h	augmentation	10′ 41″, 9
pour 6h	.... id.	5′ 20″, 9
pour 1h	.... id.	0 53″, 5
pour 20m	.... id.	0 17″, 8
pour 5m	.... id.	0 4″, 4
pour 1m	.... id.	0 0″, 9
pour 1m	.... id.	0 0″, 9
pour 30s	.... id.	0 0″, 4
pour 15s	.... id.	0 0″, 2
pour 3s	.... id.	0 0″, 0
		17′ 20″, 9

Ajoutant à la distance du 15 à midi, on obtient 9° 56′ 25″, 5.

PROGRESSIONS.

Des nombres croissant ou décroissant consécutivement d'une quantité constante forment, par leur ensemble, l'expression nommée progression par différence.

3.5.7.9.11.13.15, etc., est une progression croissante.

16.13.10.7.4.1, etc., est une progression décroissante.

La différence constante d'un terme au précédent se nomme raison.

Dans la première expression la raison est 2, dans la seconde elle est — 3.

On voit que le second terme est égal au premier, augmenté de la raison; le troisième au deuxième, augmenté de la raison, ou au premier plus deux fois la raison. Le quatrième est de même égal au premier, plus trois fois la raison : d'où l'on déduit cette loi générale : Dans une progression par différence, un terme quelconque est égal au premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. On traduit algébriquement cette propriété par la formule $l = a + (n - 1)\,d$, n exprimant le nombre des termes, a le premier, l le dernier, d la raison.

Ainsi le 21e terme de la première progression serait $3 + 20 \times 2$, ou 43.

On voit qu'il est possible de prolonger indéfiniment une progression au delà de son dernier terme jusqu'à l'infini, et aussi en deça de son premier terme; seulement les termes, dans cette partie, deviennent négatifs, ce qui autorise à dire que lorsqu'une progression par différence est indéfiniment étendue dans les deux sens, ses termes sont renfermés entre l'infini positif et l'infini négatif.

Si donc on représente par a, b, c, f, g, h, k les termes consécutifs d'une progression par différence, elle se présente sous la forme

$$a.b.c.f.g.h.k.l.m.o.$$

La somme de deux termes placés à égale distance des extrêmes est égale à la somme des extrêmes. En effet, soient choisis les deux

termes f, k, qui en ont trois, l'un avant, l'autre après lui, on a toujours, en nommant d la raison, $f = a + 3d$, $o = k + 3d$, d'où $k = o - 3d$; ajoutant ensemble les deux valeurs de f et k, on obtient $f + k = a + o$. C. Q. F. D.

On déduit de ce principe le moyen d'obtenir la valeur de la somme des termes d'une progression, sans être obligé de les sommer. En effet, si on nomme S cette somme inconnue, on aura l'égalité

$$S = a + b + c + f + g + h + k + l + m + o;$$

écrivant cette égalité dans l'ordre inverse,

$$S = o + m + l + k + h + g + f + c + b + a.$$

Ajoutant membre à membre, on s'aperçoit que la somme des deux termes qui se correspondent est celle de deux termes placés à égale distance des extrêmes, et par suite égale à celle des extrêmes; on a donc 2S égal à la somme des extrêmes répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression, ou

$$2S = (a + o)\,n; \text{ donc } S = (a + o)\,\frac{n}{2},$$

formule qu'on énonce ainsi : La somme des termes d'une progression par différence est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de la progression.

Ainsi, la somme des termes de la progression commençant par 2, ayant 3 pour raison, et composée de 81 termes, ne peut s'obtenir qu'après avoir, par la première formule, calculé le dernier terme, qui sera $2 + 80 \times 3$, ou 242; alors on aura

$$S = (2 + 242)\,\frac{81}{2} = \frac{244}{2} \times 81 = 122 \times 81.$$

Il n'y a donc pas en besoin, pour calculer la somme, de former les différents termes.

Insérer cinq moyens proportionnels entre 5 et 20, c'est former une progression commençant par 5, finissant par 20, et ayant 7 termes; on aura donc $20 = 5 + 6d$, en nommant d la raison inconnue. On en déduit $d = \frac{20 - 5}{6}$, ce qui apprend que la raison est égale à la différence des extrêmes, divisée par le nombre des moyens à insérer, plus 1. D'où la formule $d = \frac{o - a}{n + 1}$, n étant le nombre des moyens à insérer. Cette raison, ajoutée au premier

terme, fournira le deuxième; ajoutée au deuxième, donnera le troisième; ainsi de suite.

Le système des deux formules

$$l = a + (n-1)d,$$

$$S = (a+l)\frac{n}{2},$$

renfermant cinq éléments, apprend qu'il faut, dans tout problème sur les progressions par différence, donner trois des éléments, si l'on veut calculer les deux autres à l'aide des deux formules précédentes, qui deviennent un système à deux inconnues.

On voit cependant que, dans le cas où le nombre des termes ferait partie des inconnues, la question serait impossible, si n était trouvée fractionnaire.

Si on insère entre les termes consécutifs d'une progression par différence le même nombre de moyens, ces termes nouveaux et les anciens formeront une progression non interrompue. En effet, soit la progression

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, f \,.\, k;$$

en insérant n moyens entre les termes consécutifs, on aura pour valeurs les diverses raisons

$$d = \frac{b-a}{n+1},\ d' = \frac{c-b}{n+1},\ d'' = \frac{f-c}{n+1},\ d''' = \frac{k-f}{n+1}.$$

Mais les numérateurs sont tous égaux à la raison de la progression proposée; ces raisons sont donc égales, et par conséquent les progressions partielles de a en b, de b en c, etc., se feront suite comme ayant des raisons égales, et étant liées d'ailleurs par les termes b, c, f.

Si le premier terme d'une progression prend la valeur particulière zéro, les propriétés précédentes se modifient.

Chaque terme devient un multiple entier de la raison, le second étant égal à la raison.

La somme de deux termes est donc un multiple de la raison, ou un nouveau terme de la même progression.

Ce nouveau terme en a autant avant lui, à partir du premier, qu'il y en a tant avant l'un qu'avant l'autre des deux termes ajoutés. En effet, soit la progression

$$o \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \,.\, 5d \,.\, 6d \,.\, 7d \,.\, 8d \,.\, 9d \,.\, 10d \,.$$

Si on ajoute ensemble les termes $4d$ et $6d$, qui en ont l'un 4, l'autre 6 avant eux, on obtient $10d$, nouveau terme qui en a bien 10 avant lui.

Cette propriété appartient exclusivement aux progressions commençant par zéro, ou par un multiple de la raison, ce qui revient au même; parce qu'alors, en la prolongeant en deçà du premier terme, on parviendra au terme zéro, qui sera le multiple zéro de la raison.

PROGRESSIONS PAR QUOTIENT.

La progression par quotient est une suite de termes tels, que le quotient de l'un d'eux par le précédent est une quantité constante dans toute l'étendue de la suite.

Si donc on désigne par a le premier terme d'une progression, et par q le quotient constant, nommé raison, elle se présentera sous la forme

$$a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots\ldots\ldots$$

et la loi de dérivation des termes les uns des autres fait reconnaître que l'un d'entre eux est égal au premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent. La progression sera donc croissante si la raison est plus grande que l'unité, et décroissante dans le cas contraire.

Ce principe fondamental se formule ainsi : $l = a \times q^{n-1}$.

Si on compare cette expression à celle analogue, $l = a + d(n-1)$, on voit que des progressions par différence et quotient ne se distinguent l'une de l'autre que par la signification de la raison, qui, dans la première, est une différence, et, dans la seconde, un quotient. Les formules correspondantes se déduisent les unes des autres en élevant les opérations d'un degré, puisque $+$ est devenu $\times$, et le coefficient de d l'exposant de q.

Le vingtième terme d'une progression par quotient, commençant par 3 et ayant 2 pour raison, sera donc 3×2^{19}.

D'après la loi de dérivation des termes les uns des autres, on voit qu'il est possible d'étendre une progression par quotient croissante au delà de son dernier terme, jusqu'à une limite quelconque.

On peut également la prolonger en deçà du premier : il suffira

de diviser le premier par la raison pour avoir celui qui le précède, et ainsi de suite ; ce qui fait voir que les termes de la partie descendante seront de plus en plus petits, et auront pour limite zéro.

D'où l'on est en droit de conclure que les termes d'une progression par quotient, étendue indéfiniment dans les deux sens, sont compris entre les limites zéro et l'infini, et que la partie décroissante ne passe pas au négatif, comme dans la progression par différence.

Le produit de deux termes placés à égale distance des extrêmes est égal à celui des extrêmes.

En effet, soit la progression par quotient écrite sous la forme

$$a : b : c : d : e : f : g : h : k : l,$$

on a toujours, d'après le principe précédent, $d = a \times q^3$, $l = g \times q^3$. De cette dernière on déduit $g = \frac{l}{q^3}$. Multipliant l'une par l'autre les valeurs de d et de g, on obtient

$$d \times g = a \times q^3 \times \frac{l}{q^3} = a \times l,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On déduit de ce principe le moyen de former la valeur du produit des termes d'une progression par quotient limitée, sans être obligé d'effectuer leur multiplication.

En effet, en désignant par P ce produit, on aura, pour obtenir la valeur de P, l'expression

$$P = a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times k \times l;$$

en renversant l'ordre des facteurs, elle devient

$$P = l \times k \times g \times f \times e \times d \times c \times b \times a;$$

et les multipliant terme à terme :

$$P^2 = (a \times l)\ (b \times k)\ (c \times g)\ (d \times f) \times (e \times e)\ (g \times c)\ (k \times b)\ (l \times a).$$

Mais les produits entre parenthèses sont évidemment formés de deux termes de la première progression équidistants des extrêmes; chacun d'eux peut donc se remplacer par $a \times l$, et par suite

$$P^2 = (al)\ (al)\ (al) \ldots, \text{ ou } P^2 = (al)^n; \text{ d'où } P = \sqrt{(a+l)^n}.$$

Il faut donc, pour avoir le produit des termes d'une progression par quotient, élever le produit des extrêmes à une puissance marquée par le nombre des termes, et extraire la racine carrée du résultat. Ainsi, le produit des termes de la progression par quotient

commençant par 3, ayant 5 pour raison, et 80 pour nombre des termes, sera égal à

$$P = \sqrt{\left(3\,(3 \times 5^{79})\right)^{80}}.$$

3×5^{79} est l'expression de la valeur du dernier terme qu'on a dû déduire des données de la question avant de pouvoir appliquer la formule.

Cette formule, comparée à sa correspondante $S = (a + l)\frac{n}{2}$, fait voir que l'analogie se continue, et qu'elle s'en déduit en élevant toutes les opérations d'un degré.

Insérer cinq moyens par quotient entre 7 et 60, c'est former une progression par quotient commençant par 7, finissant par 60, et composée de sept termes. On découvrira sa raison au moyen du premier principe, en posant $60 = 7 \times q^6$, d'où $q = \sqrt[6]{\frac{60}{7}}$.

Il faut donc, pour calculer la raison, diviser le dernier terme par le premier, et extraire du quotient une raison marquée par le nombre des moyens à insérer, plus un.

On trouve le premier moyen en multipliant le premier terme donné par la raison ; le second moyen, en multipliant le premier calculé par la raison, ainsi de suite.

On voit qu'ici les opérations ne peuvent plus s'effectuer comme dans les progressions par différence, à cause de l'indice des racines à extraire, qui peut surpasser le nombre 3.

Le système des deux formules

$$l = a \times q^{n-1},$$
$$P = \sqrt{(a \times l)^n},$$

renfermant les cinq éléments a, l, q, n, P, fait voir qu'il est toujours possible, étant donnés trois d'entre eux, de déterminer les deux autres. Mais elles ne sont pas utilisables, d'après les principes qui précèdent, lorsque n est un des éléments cherchés, cette quantité entrant comme exposant dans les équations précédentes, et constituant des expressions nommées exponentielles. La résolution des équations de cette espèce sera l'une des applications de la théorie qui va suivre.

Lorsqu'on insère le même nombre de moyens proportionnels entre les termes consécutifs d'une progression, ces moyens et les termes primitifs constituent une progression non interrompue.

En effet, soient a, b, c, d, f, des termes en progressions par quotient. Pour insérer cinq moyens entre ces termes consécutifs, il faut calculer les raisons données par les formules :

$$q = \sqrt[6]{\frac{b}{a}}, \quad q' = \sqrt[6]{\frac{c}{b}}, \quad q'' = \sqrt[6]{\frac{d}{c}}, \quad q''' = \sqrt[6]{\frac{f}{d}}.$$

Mais les quantités soumises à ces divers radicaux sont égales comme exprimant la raison de la progression donnée. Les progressions partielles de a en b, de b en c, de c en d, se feront donc suite comme ayant des raisons égales, et étant liées entre elles par un des termes primitifs.

On peut aussi se procurer la somme des termes d'une progression par quotient par une formule qui ne saurait avoir d'analogue dans les progressions par différence.

Soit en effet l'expression

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7.$$

Si l'on multiplie les deux membres par q,

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7 + aq^8.$$

Retranchant la première de la seconde, membre à membre,

$$Sq - S = aq^8 - a;$$

d'ou mettant S en facteur commun dans le premier membre, et déduisant la valeur de cette inconnue,

$$S = \frac{aq^8 - a}{q - 1}.$$

On dit en conséquence que la somme des termes d'une progression par quotient est égale au dernier terme multiplié par la raison, moins le premier terme, le tout divisé par la raison moins un. Si la progression était décroissante, la raison q serait moindre que 1, et par suite le dénominateur négatif. On approprie la formule à ce cas en changeant les signes du numérateur et du dénominateur, et partageant le second membre en deux termes.

On obtient alors $\quad S = \dfrac{a}{1 - q} - \dfrac{aq^{n+1}}{1 - q}.$

Le second terme de cette formule converge vers zéro, à mesure

que le nombre des termes converge vers l'infini; car le numérateur aq^{n+1} s'approche de zéro, q étant moindre que l'unité, à mesure que n converge vers l'infini. Alors la somme a pour limite $\frac{a}{1-q}$.

On dit en conséquence que la somme des termes d'une progression par quotient décroissante à l'infini a pour limite le quotient du premier terme par l'unité diminuée de la raison.

Ainsi, $$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3},$$

progression par quotient décroissante, dont le premier terme est 2 et la raison $\frac{1}{3}$, a pour limite de la somme de ses termes

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\frac{2}{3}} \quad \text{ou } 3.$$

Le premier terme d'une progression par quotient ne peut être zéro; mais il peut être égal à l'unité. Dans ce cas, les propriétés précédemment démontrées subissent des modifications.

Un terme quelconque devient une puissance de la raison; les termes consécutifs sont alors les puissances entières successives de la raison, le second terme étant la raison.

Le produit de deux termes quelconques forme donc un terme de la même progression, puisque ce produit est une nouvelle puissance de la raison.

Ce terme en a autant avant lui qu'il y en avait tant avant l'un qu'avant l'autre des deux termes multipliés. En effet, q^7 est le terme qui en a sept avant lui à partir de l'unité; q^{13} est le terme qui en a treize avant lui; et leur produit q^{20} a vingt termes avant lui.

Ces propriétés appartiennent exclusivement aux progressions par quotient qui commencent par l'unité, ou par une puissance de la raison, ce qui revient au même; parce qu'en la prolongeant en deçà du premier terme, on parviendra à la puissance zéro de la raison, c'est-à-dire à l'unité.

Mais il est bien entendu que la première partie seule du théorème est applicable, si la progression commence par une puissance de la raison. Alors le produit de deux termes est un terme nouveau; mais on ne peut assigner son rang qu'autant qu'on a préalablement poussé la progression jusqu'au premier terme égal à l'unité.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Lorsqu'on écrit les termes d'une progression par différence commençant par zéro, de manière à ce qu'ils correspondent à pareille suite de termes en progression par quotient commençant par l'unité, les termes de la première progression se nomment les logarithmes de ceux de la seconde.

Ainsi, 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.

Les nombres 5, 6, 7, sont les logarithmes des nombres 32, 64, 128.

On voit par cette définition que le logarithme d'un nombre n'est point un nombre fixe, puisqu'on aurait pu, à la même progression par quotient, faire correspondre une foule d'autres progressions par différence commençant par zéro.

C'est ce qui fait dire qu'il existe une infinité de systèmes de logarithmes, un système se composant de l'ensemble de deux progressions qui se correspondent, mais qui sont arbitrairement choisies, excepté pour leurs premiers termes, qui doivent toujours être 1 et zéro.

Il suit de là que la partie négative de la progression par différence correspondant à celle de la progression par quotient où tous les termes sont moindres que l'unité, une fraction a son logarithme négatif; et un nombre précédé du signe —, n'ayant pas de place dans la progression par quotient, ne saurait avoir de logarithme.

D'après les propriétés dont jouissent les progressions par quotient et par différence qui commencent par un et zéro, et qu'on peut écrire sous la forme :

$$1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 : q^8 : q^9 : q^{10},$$
$$0 . d . 2d . 3d . 4d . 5d . 6d . 7d . 8d . 9d . 10d,$$

on reconnaît que le produit q^8 des deux termes q^3 et q^5 corres-

pond à la somme $8d$ des termes $3d$ et $5d$; donc

$$q^8 = q^3 + q^5;$$
$$8d = 3d + 5d.$$

Mais $8d$ se nomme logarithme de q^8 ou du produit, $3d$ et $5d$ sont les logarithmes des facteurs q^3 et q^5; on peut donc dire que le logarithme du produit de deux facteurs est composé de la somme des logarithmes de ces facteurs.

Ce raisonnement s'applique également à un produit de plus de deux facteurs.

On formule cette propriété de la manière suivante :

$$\log. abc = \log. a + \log. b + \log. c.$$

On sait que

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a;$$

prenant les logarithmes des deux membres de cette égalité, en appliquant le principe précédent :

$$\log. a^5 = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a + \log. a = 5 \log. a.$$

On dit donc que le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'exposant de la puissance.

Si on désigne par q le quotient complet des nombres A et B, on aura l'égalité $A = Bq$. Prenant les logarithmes des deux membres de cette égalité, on obtient $\log. A = \log. B + \log. q$, d'où $\log. q = \log. A - \log. B$.

Le logarithme du quotient est donc égal au logarithme du dividende diminué du logarithme du diviseur.

Si on représente par a la racine cinquième de A, on aura l'égalité

$$\sqrt[5]{A} = a.$$

Élevant les deux membres à la puissance 5, afin de faire disparaître le signe radical, on trouve $A = a^5$, et, prenant les logarithmes des deux membres d'après les principes précédents,

$$\log. A = 5 \log. a,$$

d'ou on déduit

$$\log. a = \frac{\log. A}{5}, \quad \text{ou} \quad \log. \sqrt[5]{A} = \frac{\log. A}{5}.$$

On dit en conséquence que le logarithme de la racine cinquième d'un nombre se compose du logarithme de ce nombre divisé par l'indice du radical. Cette règle s'applique visiblement aux racines de tous les degrés.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on possédait une table renfermant tous les nombres imaginables, et leurs logarithmes en regard, on pourrait arriver aux résultats de calculs compliqués, et quelquefois impossibles avec les principes déjà établis, au moyen d'opérations plus simples, en cherchant, non le résultat lui-même, mais son logarithme.

La table se chargerait alors de fournir le nombre correspondant, ou la solution de la question.

Ainsi, pour obtenir le produit des trois nombres 3728, 5712, 4859, on se bornerait à additionner leurs trois logarithmes; à cette somme correspondrait dans la table le produit cherché. A ce point de vue, une table de logarithmes est une table générale de multiplication.

Pour diviser l'un par l'autre les deux nombres 37827 et 629, on retrancherait du logarithme du premier celui du second; le résultat serait le logarithme du quotient, et le nombre lui correspondant dans la table serait le quotient.

Pour élever le nombre 7854 à la cinquième puissance, on prendrait son logarithme, qu'on multiplierait par 5. Ce résultat, cherché dans la table, aurait pour nombre correspondant la cinquième puissance désirée.

Enfin, pour extraire la racine septième de 78, il faudrait prendre le logarithme de 78, puis le diviser par 7, et chercher ce quotient dans la table. Le nombre correspondant serait la racine septième obtenue.

Pour résoudre l'équation $A^x = B$, nommée exponentielle, et de l'espèce de celles fournies par les progressions par quotient, on prendra les logarithmes des deux membres, ce qui donnera

$$x \log. A = \log. B, \text{ d'où } x = \frac{\log. B}{\log. A}.$$

Il suffira donc de diviser l'un par l'autre les logarithmes de B et de A pour avoir la valeur de l'inconnue x.

On voit que l'emploi des logarithmes, qui apporte aux opéra-

tions une très-grande simplification, deviendra d'autant plus prompt, que les logarithmes eux-mêmes seront des nombres plus faciles à combiner entre eux. C'est ce qui a fait choisir, pour former la table usuelle, les progressions particulières

$$1 : 10 : 100 : 1000 : 10000,$$

et

$$0 . 1 . 2 . 3 . 4.$$

FORMATION D'UNE TABLE DE LOGARITHMES.

Neper, auteur des logarithmes, construisit la première table, portant le nom de table népérienne, ou des logarithmes népériens. On peut la concevoir de la manière suivante :

On compose une progression par quotient, dont la raison est formée de l'unité augmentée d'une fraction a très-petite, telle que

$$1 : 1 + a : (1 + a)^2 : (1 + a)^3 : (1 + a)^4 : (1 + a)^5 : (1 + a)^6 : (1 + a)^7 : (1 + a)^8 \ldots\ldots$$

et on lui fait correspondre la progression par différence

$$0 . a . 2a . 3a . 4a . 5a . 6a . 7a, \text{ etc.}$$

On voit que ce qui distingue de tout autre système celui-ci, qui ne demande que de la patience pour être établi, c'est que la raison de la progression par différence est égale à la fraction ajoutée à l'unité pour former la raison de la progression par quotient.

Si on admet pour un moment que a soit égal à 0,1, le système devient

$$\begin{array}{l} 1 : 1,1 : 1,21 : 1,331 : 1,464 : 1,610 : 1,771 : 1,949 : 2,143 : 2,358 : 2,594, \\ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1. \end{array}$$

On ne peut donc espérer obtenir ainsi les logarithmes des membres dans toutes leurs nuances de grandeur.

Supposons qu'à l'aide des deux progressions ci-dessus on cherche à se procurer le logarithme du nombre 2, qui ne fait pas partie des termes de la progression par quotient, mais est compris entre les deux 1,949 et 2,143 : ce logarithme est renfermé entre 0,7 et 0,8.

Si on attribue à 2 pour logarithme le nombre 0,7, on fait une erreur moindre que 0,1. En donnant à a la valeur 0,01, et raisonnant de la même manière, on eût trouvé le logarithme cherché, à moins de 0,01.

Comme on ne peut espérer renfermer dans une table les logarithmes de tous les nombres, on a cherché à y insérer au moins ceux des nombres entiers consécutifs, depuis l'unité jusqu'à une certaine limite. Le système des deux progressions étant formé, on en déduit une table, en négligeant tous les termes de la progression par quotient qui ne sont pas les plus approchants des nombres entiers consécutifs. C'est par cette raison que les deux progressions sont rompues, et n'existent plus dans les tables.

On nomme donc table de logarithmes des termes choisis parmi ceux d'une progression par quotient commençant par l'unité, et les termes qui leur correspondent dans une progression par différence commençant par zéro.

Une table de logarithmes, construite d'après le système de Neper, a l'inconvénient de ne permettre l'emploi des logarithmes que pour les nombres plus petits que le plus grand renfermé dans cette table; et comme a doit être très-petit pour avoir une approximation suffisante, la progression par quotient ne peut s'étendre qu'à des limites très-restreintes.

Il faudrait donc ou beaucoup de volumes, ou se priver des logarithmes des grands nombres dépassant certaines limites; et ce sont précisément ceux pour lesquels l'emploi des logarithmes procure les plus grandes simplifications.

On a donc cherché à modifier les logarithmes népériens, de manière à leur donner les avantages de simplicité et d'étendue qu'ils ne possédaient pas.

Or, lorsqu'on multiplie par un même nombre tous les termes d'une progression par différence, les produits sont encore en progression par différence: la raison a seulement été multipliée par ce nombre.

Donc, lorsqu'on multiplie par un même nombre, quel qu'il soit, tous les logarithmes d'un système, on forme ceux d'un autre système.

En conséquence, y a-t-il moyen de donner à ce multiplicateur une valeur telle, que les nouveaux logarithmes ainsi formés soient

plus faciles à utiliser que les anciens? que, par exemple, le logarithme de 10 devienne égal à 1 ?

Comme le logarithme népérien de 10 est égal à 2,3, à moins de 0,1, on a posé $2,3 \times x = 1$, d'où $x = \frac{1}{2,3}$, qui, réduit en décimales, donne 0,434, nombre qu'on nomme module du système décimal.

En multipliant donc par ce nombre tous les logarithmes de Neper, on a obtenu ceux nommés décimaux, ou dans la base 10.

L'avantage principal de ce nouveau système, c'est que le nombre 10 qui prend le nom de base, ayant pour logarithme 1, 100, carré de 10, a pour logarithme deux fois le logarithme de 10 ou 2; par suite, les logarithmes de 1000, 10000, 100000, sont 3, 4, 5.

Tous les nombres entiers compris entre

1 et	10	ont 1 chiffre;	leurs logarithmes sont	entre	0 et 1;
10 et	100	ont 2 chiffres;	» »	entre	1 et 2;
100 et	1000	ont 3 chiffres;	» »	entre	2 et 3.

On peut donc conclure de cette observation que la partie entière du logarithme d'un nombre, partie nommée caractéristique, se compose d'autant d'unités qu'il y a de chiffres moins un dans le nombre entier. Dans toute autre base que 10, le même fait ne se produit pas.

On a donc pu se dispenser d'écrire les caractéristiques dans les tables, ce qui les a rendues moins volumineuses.

Un nouvel avantage résulte de la propriété de la caractéristique : c'est qu'on peut, sans calculs, trouver le logarithme d'un nombre plus grand que le plus grand nombre des tables étendues seulement jusqu'à 10800.

Soit à chercher le logarithme de 87654.

On peut toujours poser l'égalité $87654 = 8765,4 \times 10$;

donc, $\log. 87654 = \log. 8765,4 + \log. 10.$

Or, log. 8765,4 est renfermé dans les tables qui sont calculées de dixième en dixième. On déduit de là cette règle :

Pour trouver le logarithme d'un nombre plus grand que 10800, on sépare par une virgule sur sa droite un nombre tel de chiffres décimaux, que le nombre restant à gauche soit renfermé dans les limites des tables.

On prend alors son logarithme, et l'on ajoute à la caractéristique autant d'unités qu'on avait séparé de chiffres. Réciproquement :

Ayant à chercher le nombre correspondant à un logarithme 5,7864321, si on pose 5,7864321 = 3,7864321 + 2, le nombre correspondant au logarithme donné est égal à celui qui correspond à 3,7864321, multiplié par celui qui correspond au logarithme 2, ou par 100.

Les tables ne renfermant que les logarithmes des nombres de 1 à 10800, calculés de dixième en dixième, il reste à savoir comment obtenir le logarithme d'un nombre entier joint à un nombre de centièmes ou de millièmes.

Soit pour exemple à chercher le logarithme de 3756,27.

La table fournit les nombres suivants :

$$\log.\ 3756{,}2 = 3{,}5747487,$$
$$\log.\ 3756{,}3 = 3{,}5747602.$$

Le logarithme du nombre 3756,27 est donc compris entre les deux précédents, qui diffèrent de 116 unités du dernier ordre décimal. On établira par suite la proportion

$$0{,}1 : 116 :: 0{,}07 : x,$$ qui se traduit ainsi :

Si, pour une augmentation de un dixième sur le nombre, le logarithme augmente de 116, de combien, pour une augmentation de sept centièmes sur le nombre, le logarithme augmente-t-il? On trouvera 88 à ajouter au logarithme du nombre 3756,2.

La proportion précédente, qu'on nomme proportion de l'usage des tables, admet que la différence des nombres est proportionnelle à celle des logarithmes, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, puisque dans les tables les nombres sont en progression par différence, ce qui n'a pas lieu pour leurs logarithmes; seulement on peut dire que cette proportion s'éloigne d'autant moins de la vérité, que les nombres sont plus grands.

Si on voulait trouver le logarithme de la fraction décimale 0,547, on écrirait $\frac{547}{1000}$; prenant donc le logarithme de 547, il en faudrait retrancher le logarithme de 1000 ou 3, ce qui produirait un résultat négatif.

Pour éviter cet inconvénient, on retranche le nombre 3 seulement a la caractéristique, qui seule alors devient négative, et au-

dessus de laquelle s'écrit le signe moins : le logarithme se présente donc sous la forme $\bar{2}$,7865463.

Le problème inverse consiste à chercher le nombre correspondant à un logarithme donné. Soit 3,5755872.

Ce logarithme n'est pas dans les tables, mais se trouve compris entre 3,5755804 et 3,5755919, qui correspondent aux nombres 3763,4 et 3763,5.

On fera en conséquence la proportion 115 : 68 :: 0,1 : x; d'où $x = 0,05$; c'est-à-dire, la différence entre les deux logarithmes de la table est à la différence entre le premier logarithme des tables et celui proposé, comme la différence des deux nombres consécutifs de la table est à la quantité cherchée. Le nombre demandé est donc 3763,45.

La disposition des tables de Callet dispense de cette proportion, dont le résultat est inscrit dans une colonne spéciale.

Pour trouver le nombre correspondant au logarithme $\bar{2}$,5734864, il faut augmenter la caractéristique d'assez d'unités pour qu'elle devienne égale à 3, c'est-à-dire 5, et chercher le nombre correspondant au logarithme 3,5734864. Une fois ce nombre trouvé, on le divisera par l'unité suivie de cinq zéros, nombre correspondant aux cinq unités ajoutées à la caractéristique.

En général, il faut, lorsqu'on doit opérer par parties proportionnelles, repousser, soit le nombre, soit leurs logarithmes, vers l'extrémité de la table, endroit où la proportionnalité entre les nombres et leurs logarithmes est le moins en erreur.

A cet effet, si le nombre est par exemple 27,575, on le transforme en cet autre 2757,5, au logarithme duquel on donne d'ailleurs 1 pour caractéristique.

Si le logarithme était 1,7848659, on augmenterait la caractéristique de deux unités; il deviendrait alors 3,7848659. Le nombre correspondant une fois trouvé, on le diviserait par 100.

Si on veut opérer par logarithmes la division de a par b, il faut de log. a retrancher log. b. On cherche à éviter ces soustractions, qui peuvent être des causes d'erreurs par suite des emprunts que l'on peut oublier.

Mais l'expression log. a — log. b peut se mettre sous la forme log. a — log. b + 10 — 10 ; 10 — log. b est ce qu'on nomme le

complément arithmétique du logarithme de b, et par suite on écrit $\log. a + C' \log. b - 10$.

Le complément d'un logarithme étant le reste que l'on obtient en retranchant ce nombre de 10, se trouve en complétant le dernier chiffre à 10 et les autres à 9. Ainsi le complément de 3,7865394 est 6,2134606.

On voit que toutes les fois qu'on remplace la soustraction d'un logarithme par l'addition de son complément, on doit retrancher 10 au résultat final ; opération qui s'exécute sur la caractéristique.

Si l'on voulait donc appliquer les logarithmes à l'expression

$$x = \sqrt[5]{\frac{7856 \times 49^3}{257}},$$

on trouverait :

$$\log. x = \frac{\log. 7856 + 3 \log. 49 + C' \log. 257 - 10}{5}.$$

Une expression qui a ses parties séparées par l'un des signes + ou — ne peut être traitée par logarithmes, à moins qu'il ne soit possible, à l'aide des principes algébriques, de la transformer en une autre ne contenant que des produits ou quotients indiqués. C'est ce qu'on nomme rendre une expression logarithmique.

La méthode indiquée précédemment pour la formation d'une table donne seulement une idée de la marche que l'on pourrait suivre. Mais la longueur des opérations rendrait ce procédé inexécutable. Aussi en existe-t-il d'autres qui ont été suivis réellement.

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

On a remis à ce moment l'analyse de la question des intérêts composés, parce qu'elle s'appuie à la fois sur les principes algébriques et la théorie des logarithmes.

Lorsqu'une somme a été placée, et qu'on ne la retire qu'au bout d'un certain nombre d'années, on doit toucher à la fin de chaque année les intérêts produits par ceux de l'année précédente qui n'ont pas été prélevés. C'est là ce qu'on nomme intérêts composés.

Soit donc A une somme, i le taux de l'intérêt, t le nombre d'années pendant lequel elle est restée placée, et V la valeur qu'elle aura au bout du temps t.

Au bout d'un an 100^f valent $100 + i$;

$$1^f \ldots\ldots \quad 1 + \frac{i}{100};$$

$$A^f \ldots\ldots \quad A\left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Ce premier résultat fait voir que, pour trouver la valeur d'une somme quelconque au bout de l'année, on doit multiplier cette somme par le facteur $1 + \frac{i}{100}$.

Donc $A\left(1 + \frac{i}{100}\right)$, placés au commencement de la seconde année, valent à la fin

$$A\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right), \quad \text{ou} \quad A\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2.$$

Cette nouvelle somme vaudra, par la même raison, à la fin de la troisième année $A\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3$.

On a donc la formule générale $V = A\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$.

Cette formule, qui sert à lier entre elles les quatre quantités V, A, i et t, permet de calculer l'une quelconque d'entre elles lorsqu'on connaît les trois autres.

Si on la résout par rapport à A, on obtient :

$$A = \frac{V}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t}.$$

Cette formule, qui donne la valeur actuelle de la somme, connaissant la valeur qu'elle aura au bout de t années, à i p. %, constitue la règle d'escompte.

Pour résoudre la même formule par rapport à i, on commence par chasser le dénominateur, ce qui donne :

$$\left(1 + \frac{i}{100}\right) A = V, \quad \text{d'où} \quad \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t = \frac{V}{A},$$

d'où

$$1 + \frac{i}{100} = \sqrt[t]{\frac{V}{A}};$$

et enfin

$$\frac{i}{100} = \sqrt[t]{\frac{V}{A}} - 1, \quad \text{ou} \quad i = 100\left(\sqrt[t]{\frac{V}{A}} - 1\right).$$

Comme on doit extraire la racine t de $\frac{V}{A}$, il faut opérer par logarithmes; il sera alors plus simple de les appliquer immédiatement à l'expression $\left(1+\frac{i}{100}\right)^t=\frac{V}{A}$,

et l'on aura : $t \log.\left(1+\frac{i}{100}\right)=\log. V+C' \log. A-10$;

et $$\log.\left(1+\frac{i}{100}\right)=\frac{\log. V+C' \log. A-10}{t}.$$

On obtiendra ainsi $1+\frac{i}{100}$. Retranchant donc du nombre obtenu l'unité, et multipliant le reste par 100, on aura pour résultat i.

Pour résoudre la formule par rapport à t, on prendra les logarithmes des deux membres, ce qui donnera

$$\log. V=\log. A+t \log.\left(1+\frac{i}{100}\right);$$

d'où $$\frac{\log. V-\log. A}{\log.\left(1+\frac{i}{100}\right)}=t.$$

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE	1
Numération parlée	3
Numération écrite	4
Addition	6
Soustraction	7
Multiplication	9
Division	13
Preuves	18
Fractions ordinaires	id.
Addition des fractions	19
Soustraction des fractions	21
Multiplication des fractions	22
Division des fractions	23
Opérations sur les produits indiqués	24
Fractions décimales, nombres décimaux	25
Addition des nombres décimaux	27
Soustraction des nombres décimaux	id.
Multiplication des nombres décimaux	28
Division des nombres décimaux	id.
Réduction des fractions ordinaires en décimales	31
SYSTÈME MÉTRIQUE	32
Règles de Trois	34
—— de Société	36
—— de Partage	id.
—— d'Intérêt	37
—— d'Escompte	38
—— d'Alliage	id.
Questions diverses	39
Nombres complexes. — Anciennes mesures	42
Addition des nombres complexes	43
Soustraction des nombres complexes	id.
Multiplication des nombres complexes	44
Division des nombres complexes	45
Conversion des nouvelles mesures en anciennes, et réciproquement	46
Conversion du temps en degrés, et réciproquement	47
ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE. — Préliminaires	49
Addition des polynômes	51
Soustraction des polynômes	52

Digitized by Google

Pages.
Multiplication des polynômes 52
Multiplication des monômes. — Règle des signes. — Règle des coefficients. — Règle des exposants 53
Division des monômes 58
Cas particulier 61
Équations 63
Résolution de l'équation à une seule inconnue 64
Résumé 67
Résolution de l'équation littérale ..... id.
Problèmes ..... id.
Résolution d'une équation à deux inconnues 69
Élimination 71
Discussion 75
Équations littérales 77
Résolution de trois équations littérales à trois inconnues 78
Problème des courriers 80
Équations du deuxième degré à une inconnue 82
Discussion de l'équation du deuxième degré 85
Cas particuliers d'élimination 87
Propriétés des Nombres 89
Divisibilité des nombres 90
Théorie du plus grand diviseur commun à deux nombres 92
Facteurs premiers 94
Quelques applications de la théorie des nombres premiers 97
Réduction des fractions décimales en fractions ordinaires 98
Extraction de la racine carrée 101
Approximations 106
Extraction de la racine cubique 107
Proportions 110
Combinaisons des termes d'une proportion 114
Problèmes résolus par les proportions ..... id.
Progressions par différence 120
Progressions par quotient 123
Théorie des Logarithmes 128
Formation d'une table de logarithmes 131
Intérêts composés 136

005700132